

JUL 24 1935

# ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG  
DER  
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

von

KARL SCHEEL

95. BAND. 5. UND 6. HEFT

MIT 60 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 17. JUNI 1935)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1935

Seite

<b>H → H.</b>	<b>H. Schüler und Th. Schmidt,</b> Über die Abweichung des Cassiopeiumatomkerns von der Kugelsymmetrie. (Mitteilung aus dem Institut für Sonnenphysik, Astrophysikalisches Observatorium, Potsdam.) Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 28. April 1935) . . . . .	265
	<b>R. Minkowski und H. Bruck,</b> Die Intensitätsverteilung der im Molekularstrahl erzeugten Spektrallinien. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1935) . . . . .	274
	<b>R. Minkowski und H. Bruck,</b> Die Intensitätsverteilung der roten Cd-Linie im Molekularstrahl bei Anregung durch Elektronenstoß. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1935) . . . . .	284
	<b>R. Minkowski und H. Bruck,</b> Wahre und scheinbare Breite von Spektrallinien. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. April 1935) . . . . .	299
	<b>K. Schnetzler,</b> Die Kernprozesse in Lithium bei Beschleußung mit $\alpha$ -Strahlen. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1935) . . . . .	302
	<b>S. Flügge,</b> Gibt es ein Neutron der Masse 2? Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 16. April 1935) . . . . .	312
	<b>S. Flügge und A. Krebs,</b> Treten Bineutronen bei Kernumwandlungen auf? (Eingegangen am 16. April 1935) . . . . .	319
	<b>Tag Heimer,</b> Neue Bandensysteme des Kupferhydrids. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 17. April 1935) . . . . .	321
	<b>Alf Heimer,</b> Über das Bandenspektrum des Wismuthydrids. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 17. April 1935) . . . . .	328
	<b>J. Blaton,</b> Quaternionen, Semivektoren und Spinoren. (Eingegangen am 23. April 1935) . . . . .	337
	<b>O. Stierstadt,</b> Kristallstruktur und elektrische Eigenschaften. VI. Die acht elektrischen Hauptleitfähigkeiten des Bi-Einkristalls im Magnetfeld. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Mai 1935) . . . . .	355
	<b>Max Kohler,</b> Magnetische Widerstandsänderung in Metallkristallen. (Eingegangen am 4. Mai 1935) . . . . .	365
	<b>E. Grossmann und E. Hiedemann,</b> Darstellung der Fresnelschen Beugungerscheinungen mit Wasseroberflächenwellen und Ultraschallwellen. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Mai 1935) . . . . .	383
	<b>Jan von Weyssenhoff,</b> Anschauliches zur Relativitätstheorie. I. Lineare Koordinaten und $g_{ik}$ -Koeffizienten in der speziellen Relativitätstheorie. (Eingegangen am 11. April 1935) . . . . .	391
	<b>Witold Jacyna,</b> Die Eigenschaften reeller Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung. VII. Das Boyle-Gebiet bei Helium. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. April 1935) . . . . .	409
	<b>O. Brandt und H. Freund,</b> Zur Sichtbarmachung stehender Schall- und Ultraschallwellen in Gasen. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 15. Mai 1935)	415

(Mitteilung aus dem Institut für Sonnenphysik, Astrophysikalisches Observatorium, Potsdam.)

## Über die Abweichung des Cassiopeiumatomkerns von der Kugelsymmetrie.

Von **H. Schüler** und **Th. Schmidt** in Potsdam<sup>1)</sup>.

Mit 15 Abbildungen. (Eingegangen am 28. April 1935.)

Es werden bei den Spektraltermen des Cp<sup>175</sup> (Lu) beträchtliche Abweichungen der Hyperfeinstruktur niveaus von der Landé'schen Intervallregel gefunden, die von der Unsymmetrie des Cp-Kerns herrühren. Die Abweichungen gehorchen sehr genau einem  $\cos^2$ -Gesetz. Der Kernspin von Cp wird durch Intensitätsvergleiche, entgegen der früheren Angabe, zu  $I = \frac{7}{2}$  bestimmt.

Durch das freundliche Entgegenkommen von Herrn G. Jantsch, Graz, und Herrn R. Swinne, Berlin-Siemensstadt, die uns reine Cassiopeiumpräparate zur Verfügung stellten, ist es uns möglich gewesen, die Hyperfeinstruktur einiger Cassiopeiumlinien genauer zu untersuchen. Schon bei einer früheren vorläufigen Untersuchung war es uns aufgefallen, daß sich bei allen Termen Abweichungen von der Landé'schen Intervallregel zeigen. Es schien unverständlich, daß alle diese Störungen durch benachbarte Terme hervorgerufen sein sollten. Nachdem sich inzwischen beim Europium nachweisen ließ, daß derartige Störungen von einer Unsymmetrie des Atomkerns herrühren können<sup>2)</sup>, haben wir untersucht, ob die Störungen beim Cassiopeium den gleichen Gesetzen gehorchen wie beim Europium. Wir haben die Cp II-Linien  $\lambda 6463, 5984, 4840, 6222, 4994, 5477$  untersucht, die nach Meggers und Scribner<sup>3)</sup> das Multiplett  $a^3D_{1,2,3} - a^3P_{0,1,2}$  bilden (siehe Fig. 1).

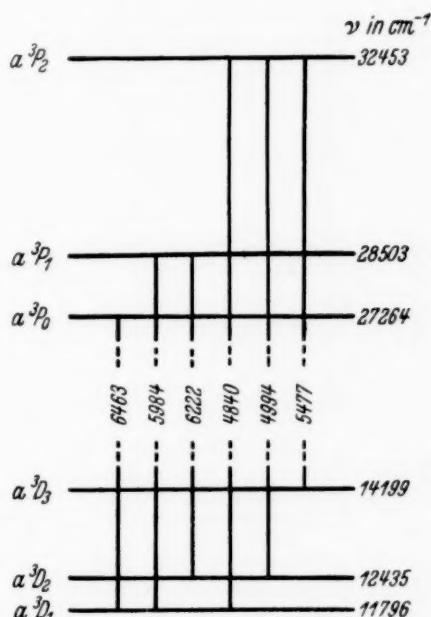


Fig. 1.

<sup>1)</sup> Der eine von uns (Th. Schmidt) dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Bewilligung eines Stipendiums, das ihm den Aufenthalt in Potsdam ermöglicht. — <sup>2)</sup> H. Schüler und Th. Schmidt, ZS. f. Phys. **94**, 457, 1935. Die in dieser Arbeit entwickelten Vorstellungen werden für das folgende als bekannt vorausgesetzt. — <sup>3)</sup> W. F. Meggers u. B. F. Scribner, Bureau of Standards, J. of Res. **5**, 73, 1930.

Da es bei der vorliegenden Untersuchung darauf ankommt, die Termstrukturen möglichst genau zu bestimmen, haben wir Aufnahmen mit den

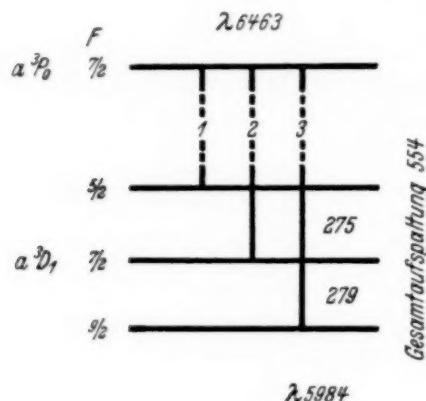


Fig. 2 a.

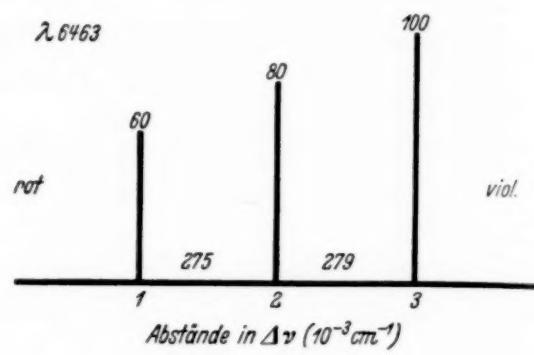


Fig. 2 b.

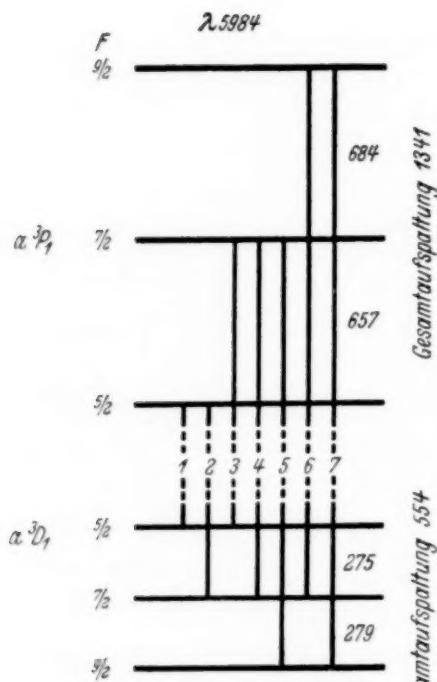


Fig. 3 a.

verschiedensten Etalonabständen gemacht und eine mit flüssiger Luft gekühlte Entladungsrohre benutzt (über diese werden wir später berichten). Die Unsicherheit der Messungen beträgt in  $\Delta\nu$  (in  $10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ) etwa 1 bis 2 Einheiten. Trotz der Kompliziertheit der Liniensstrukturen ist eine solche Genauigkeit zu erreichen, weil jeder Term im allgemeinen in mehreren Linien vorkommt.

In den Fig. 2 bis 7 sind nun die gemessenen Linienbilder und ihre Termschemata wiedergegeben, und zwar sind die Abstände zwischen den Linien und den Termen in  $\Delta\nu$  (in  $10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ) angegeben.

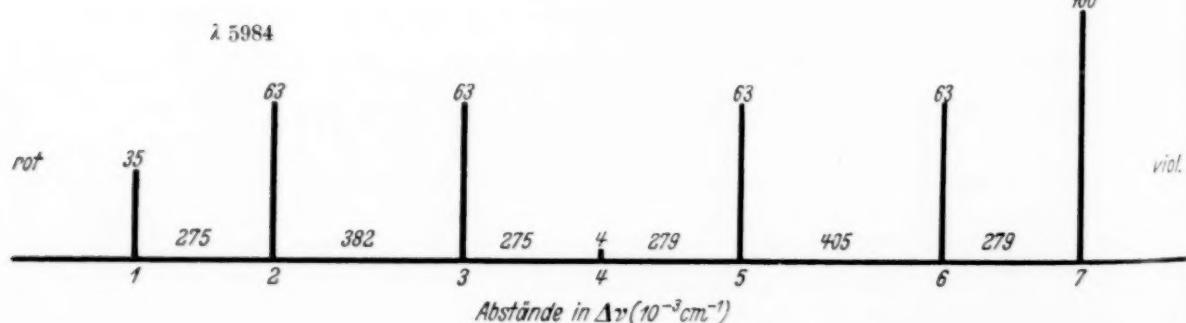


Fig. 3 b.

Zur Berechnung der Störungen wird der Wert des Spins gebraucht. Für diesen haben wir in einer vorläufigen Mitteilung den Wert  $5/2$  angegeben<sup>1)</sup>. Die neuen Aufnahmen zeigen jedoch, daß das Kernmoment größer sein muß. Leider gibt es keine Linie, bei der wir lediglich aus der Anzahl der Komponenten auf den  $I$ -Wert schließen können. Da nun andererseits die Abstandsverhältnisse infolge der Störungen auch nicht zur Bestimmung herangezogen werden können, bleibt uns nur die Möglichkeit, aus den relativen Intensitäten der Komponenten den  $I$ -Wert zu ermitteln. Es ist zu erwarten, daß diese durch die Störung gar nicht oder nur wenig beeinflußt werden. Der Vergleich der Intensitäten geeigneter Komponenten führt nun eindeutig zu  $I = 7/2$ . So sollten bei  $\lambda 6222$  die Intensitäten der Komponenten (1) und (7) sich folgendermaßen verhalten:

$I$	$5/2$	$7/2$	$9/2$
Int. (1) : Int. (7)	1,56	1,00	0,79

Aus unseren Photometerkurven ergibt sich, daß beide Intensitäten, wie es bei  $I = 7/2$  der Fall sein sollte, genau gleich sind. Analog sind bei  $\lambda 4994$  die Komponenten 9 u. 10 gleich stark, was nur für  $I = 7/2$  zutreffen

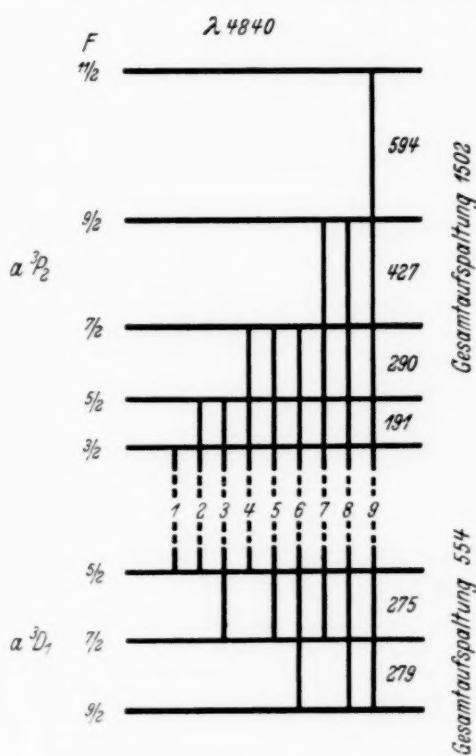


Fig. 4 a.

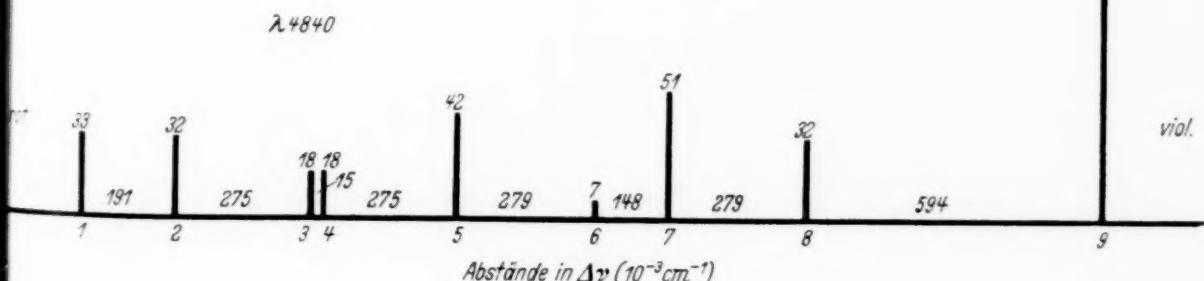


Fig. 4 b.

sollte. Auch bei  $\lambda 5477$  sprechen die Intensitäten für  $I = 7/2$ . Wir glauben deshalb berechtigt zu sein, für  $Cp^{175}$  den Wert  $I = 7/2$  anzunehmen. Für

<sup>1)</sup> H. Schüler u. Th. Schmidt, Naturwissensch. 22, 714, 1934.

diesen Wert sind in Fig. 2 bis 7 die theoretischen Intensitäten eingezeichnet und an die Termschemata die entsprechenden  $F$ -Werte ( $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ ) angegeschrieben.

Sämtliche angegebenen Terme zeigen nun beträchtliche Abweichungen vom cos-Gesetz (Landé'sche Intervallregel). Danach sollen sich bekanntlich die Abstände zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus wie die  $F$ -Werte

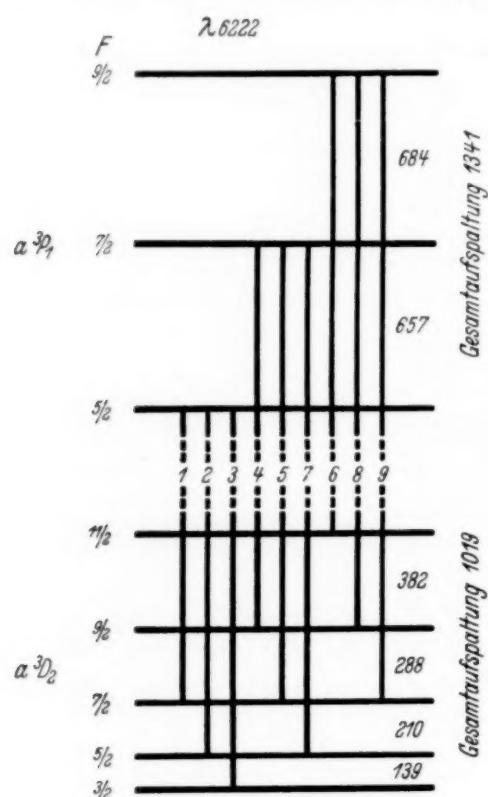


Fig. 5 a.

dieser Niveaus verhalten, und zwar so, daß jedem Abstand von den beiden begrenzenden Niveaus dasjenige mit dem höheren  $F$ -Wert zugeordnet wird. Z. B. müssen sich die Abstände zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus  $F+1$ ,  $F$ ,  $F-1$  wie  $F+1$  zu  $F$  verhalten. Um ein Maß für die Abweichungen zu bekommen, haben wir in den Fig. 8 bis 12 in gleicher Weise wie in unserer früheren Arbeit<sup>1)</sup>, die Termschemata der fünf aufspaltenden Terme angegeben. Links neben diesen gemessenen Termstrukturen sind als berechnet die Lagen der Energieniveaus angegeben, die man aus dem cos-Gesetz erhält unter Annahme der gleichen Gesamtaufspaltung (d. h.

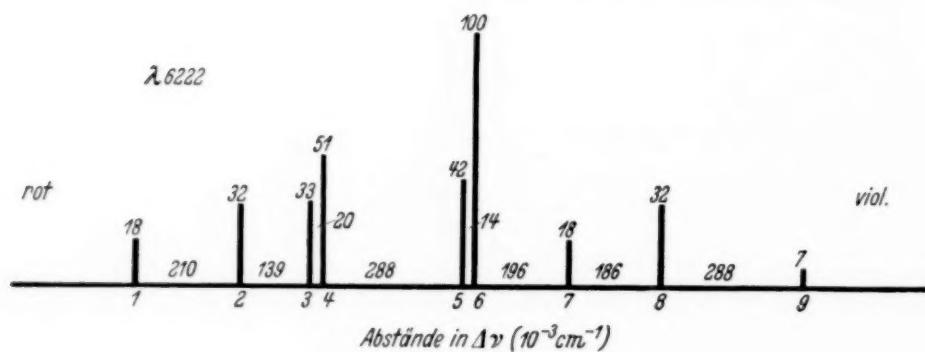


Fig. 5 b.

wenn man die höchsten und tiefsten Niveaus beider Bilder zusammenfallen läßt). Unter  $\Delta$  stehen die Differenzen der gemessenen und berechneten

<sup>1)</sup> H. Schüler u. Th. Schmidt, I. c.

Werte. Man sieht sofort, daß in sämtlichen Termen die Störungen den gleichen systematischen Verlauf aufweisen wie beim Europium. Weiter zeigt sich, daß die Abweichungen vom cos-Gesetz bei  $^3P_2$ ,  $^3D_{1,2,3}$  nach unten, bei  $^3P_1$  nach oben gerichtet sind. Genau das müssen wir nach unserer beim Europium entwickelten Modellvorstellung des unsymmetrischen Kerns verlangen, da  $^3P_2$ ,  $^3D_{1,2,3}$  zu Fall I,  $^3P_1$  zu Fall II gehören. [Hiervon kann man sich leicht durch Betrachtung des Vektorschemas ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ) dieser Terme überzeugen.] Nach diesem, dem Europium analogen Verhalten, ist wohl mit Sicherheit der Schluß erlaubt, daß auch beim Cassiopeium die Störungen von einer Abweichung des Atomkerns von der Kugelsymmetrie herrühren.

Bereits beim Europium ist darauf hingewiesen worden, daß die Störung in erster Näherung einem  $\cos^2$ -Gesetz gehorcht, und daß ein

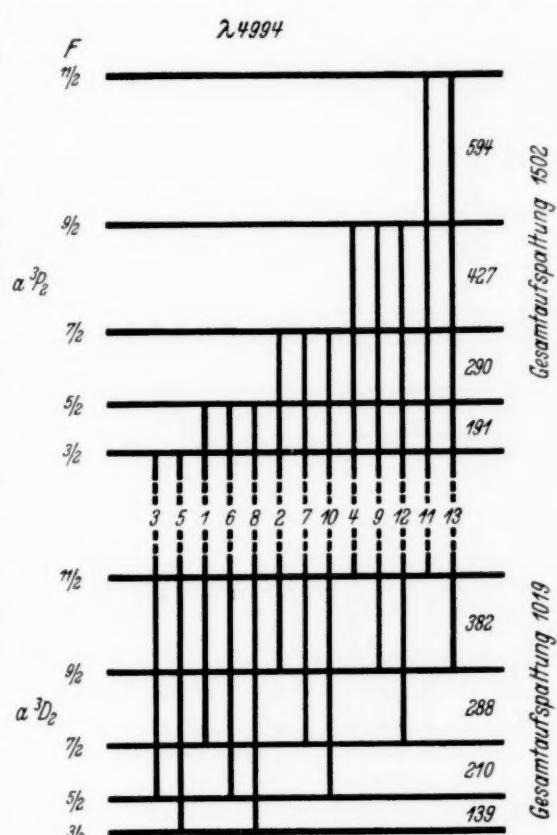


Fig. 6 a.

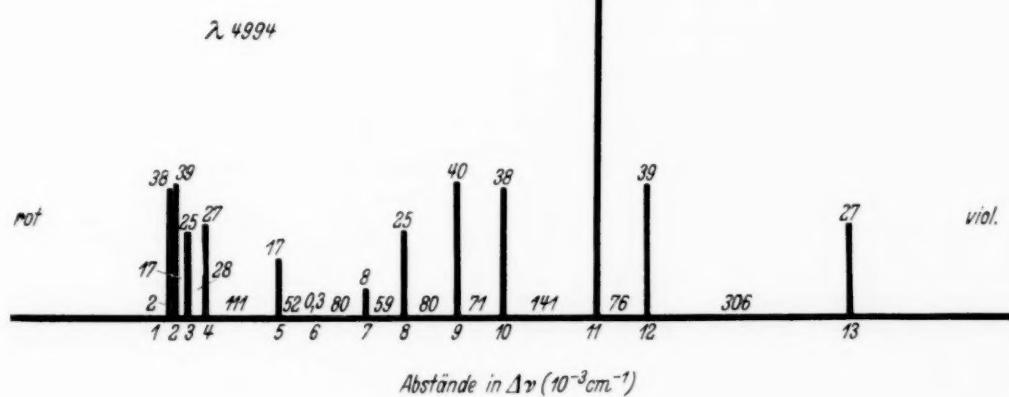


Fig. 6 b.

solches Gesetz auch nach unserer Modellvorstellung mindestens in erster Näherung gelten sollte. Eine genauere Prüfung läßt sich beim Europium nicht durchführen, da sich die Hyperfeinstrukturen der beiden Isotope teilweise überdecken, so daß eine genaue Bestimmung aller Termniveaus un-

möglich ist. Beim Cassiopeium ist jedoch nur ein Isotop (175) vorhanden, außerdem sind die Störungen hier erheblich größer; hier können wir daher

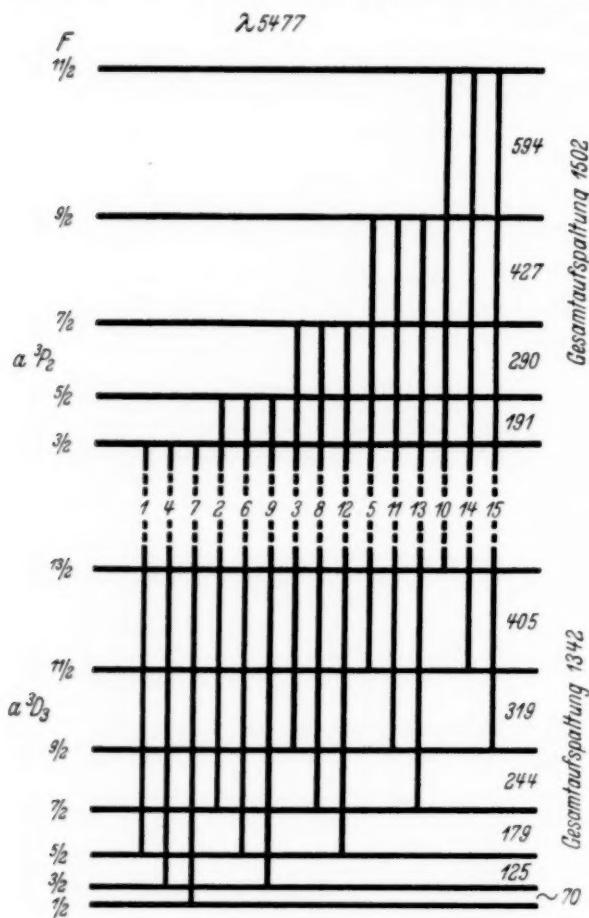


Fig. 7 a.

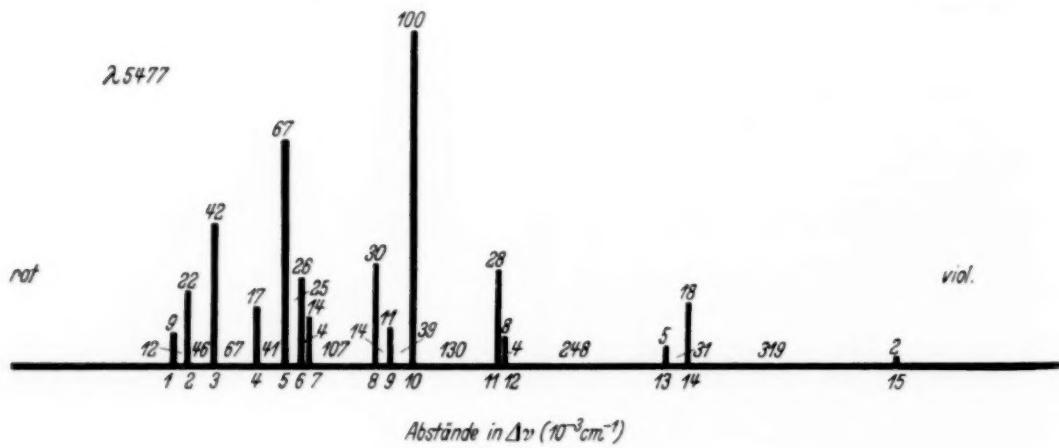


Fig. 7 b.

trischen Kern und der Elektronenhülle dar. Nach Einsetzung des quantenmechanischen Wertes für den  $\cos$  schreibt sich  $E$ :

$$E = E_0 + a_1 \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2IJ} + a_2 \left[ \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2IJ} \right]^2.$$

Wir haben nun versucht, bei den fünf ausgemessenen Termen die Hyperfeinstrukturenergien durch eine solche Formel darzustellen. In Tabelle 1 sind die sich dabei ergebenden Koeffizienten  $a_1$  und  $a_2$  angegeben.

Tabelle 1.

	$a_1$	$a_2$		$a_1$	$a_2$
$^3P_1$	571,1	- 54,7	$^3D_1$	- 235,1	25,4
$^3P_2$	676,1	66,3	$^3D_2$	453,5	27,1
			$^3D_3$	598,9	40,3

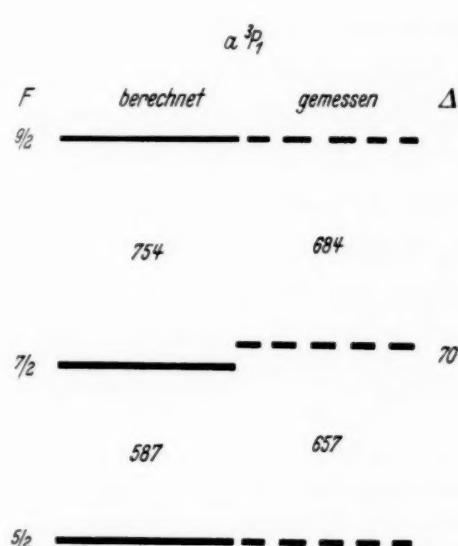


Fig. 8.

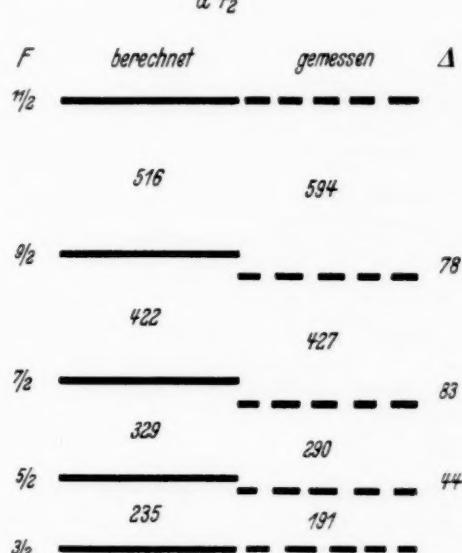


Fig. 9.

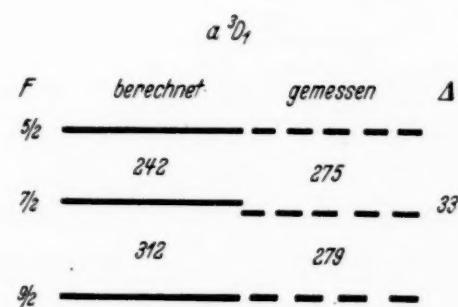


Fig. 10.

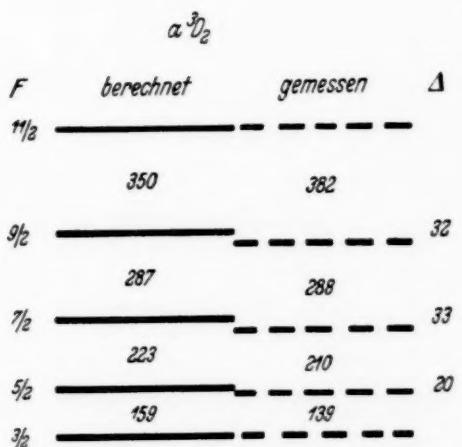


Fig. 11.

Für die Terme  $^3P_1$  und  $^3D_1$  läßt sich natürlich die Gültigkeit des obigen Ausdrucks für die Energie nicht prüfen, da hier nur je drei Energieniveaus vorhanden sind und die drei Konstanten  $E_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  der Gleichung immer so bestimmt werden können, daß diese die beobachteten Energien darstellt. Anders ist es dagegen bei  $^3P_2$  und  $^3D_2$ , wo fünf, und bei  $^3D_3$ , wo sieben

Energieniveaus vorhanden sind. In Tabelle 2 sind für diese drei Terme die gemessenen und die mit den Konstanten der Tabelle 1 berechneten Energien gegenübergestellt. Dabei ist als Energie immer der Abstand vom tiefsten Niveau des betreffenden Terms angegeben. Unter  $\Delta$  sind die Differenzen berechnet—gemessen aufgetragen. Man sieht, daß diese Differenzen vollständig innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen liegen.

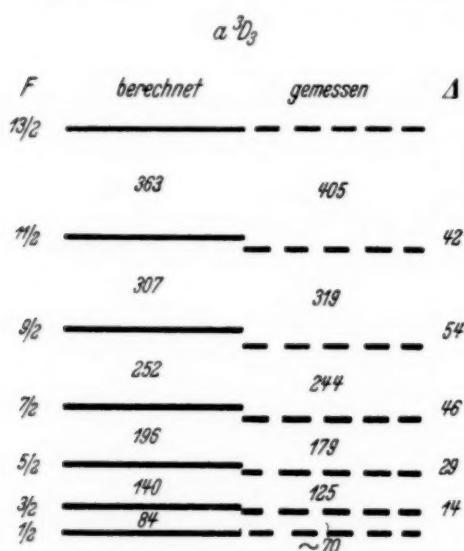


Fig. 12.

$E_2$ . Die Kurve stellt die berechneten Werte der Störung dar, die gemessenen Werte sind durch Kreise bezeichnet.

Tabelle 2.

$F$	Berechnet	Gemessen	$\Delta$	$F$	Berechnet	Gemessen	$\Delta$
$^3P_2$	0	0	0	$^3D_3$	-1	0	-1
$5/2$	189	191	-2	$3/2$	71	70	1
$7/2$	482	481	1	$5/2$	194	195	-1
$9/2$	908	908	0	$7/2$	374	374	0
$11/2$	1502	1502	0	$9/2$	618	618	0
$^3D_2$	0	0	0	$11/2$	937	937	0
$5/2$	141	139	2	$13/2$	1342	1342	0
$7/2$	349	349	0				
$9/2$	637	637	0				
$11/2$	1019	1019	0				

Aus unseren Messungen folgt also, daß in diesen Termen die Wechselwirkung zwischen dem nicht kugelsymmetrischen Atomkern und der Elektronenhülle einem  $\cos^2$ -Gesetz folgt.

Bezüglich der Frage der Art der Wechselwirkungsenergie hat uns Herr Delbrück gelegentlich einer Diskussion darauf aufmerksam gemacht, daß man nicht unbedingt die Isotopenverschiebung, was bekanntlich gewisse Schwierigkeiten bereitet, zur Erklärung heranziehen muß, sondern daß ja ein nicht kugelsymmetrischer Kern in erster Näherung einen elektrischen Quadrupol darstellt, der mit der Elektronenhülle in elektrostatischer

Wechselwirkung steht. In Angriff genommene Rechnungen werden zeigen, ob die Größenordnung dieses Effekts zur Erklärung der gemessenen Werte ausreicht. Die Regeln für den Richtungssinn der Störungen in den verschiedenen Termen bleiben jedenfalls die gleichen.

Im Hinblick auf die gefundenen Störungen der Hyperfeinstruktur durch die Unsymmetrie des Kerns scheint es uns nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß die Bestimmung des Spins nur aus

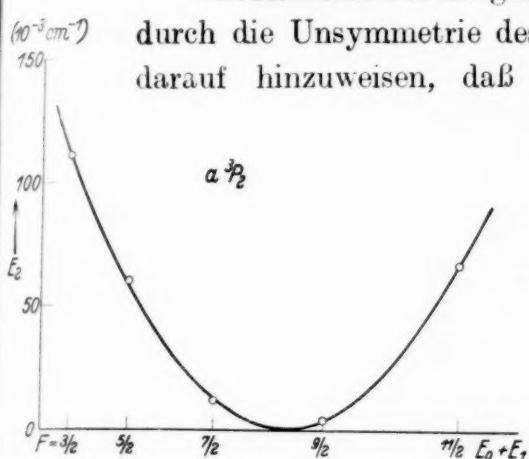


Fig. 13.

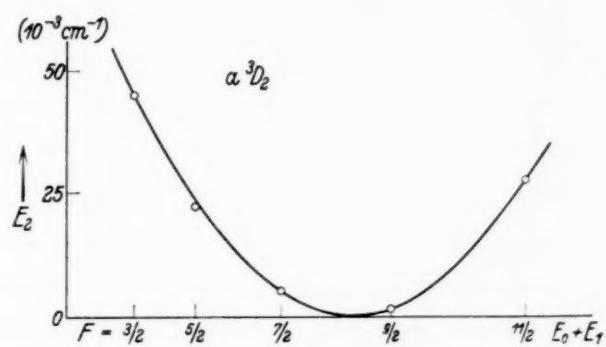


Fig. 14.

den Abstandsverhältnissen der Hyperfeinstrukturniveaus zu ganz falschen Werten führen kann, außer wenn es sich um S-Terme handelt. Als Beispiel sei nur  $^3D_1$  von Cp II genannt: aus seinen Abständen würde sich  $I = \frac{137}{2}$  ergeben.

*Anhang.* Wir möchten hier noch einen Irrtum berichtigten, der uns in der vorhergehenden Arbeit<sup>1)</sup> unterlaufen ist. Wir haben dort angegeben, daß der Richtungssinn der Störungen in den Termen  $6\ ^3P_1$  und  $6\ ^3P_2$  des Hg<sup>201</sup> den umgekehrten Sinn habe wie bei den übrigen untersuchten Elementen. Diese Angabe beruht auf einem Versehen, der Richtungssinn ist der gleiche wie bei den anderen Elementen. Es besteht also kein Unterschied zwischen Elementen mit ungeradem Proton und solchen mit ungeradem Neutron. Um dies ganz sicherzustellen, sollen beim Hg die Messungen wiederholt werden.

Diese Untersuchung wurde mit der dankenswerten Unterstützung der I. G. Farbenindustrie, Ludwigshafen-Oppau, durchgeführt.

<sup>1)</sup> H. Schüler u. Th. Schmidt, I. c.

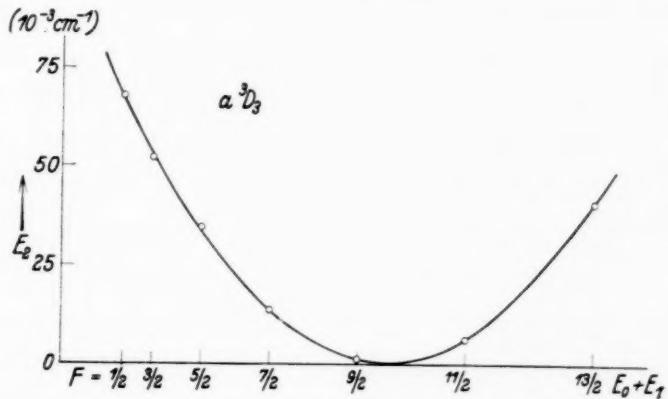


Fig. 15.

## Die Intensitätsverteilung der im Molekularstrahl erzeugten Spektrallinien.

Von **R. Minkowski** und **H. Bruck** in Hamburg.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1935.)

Die Intensitätsverteilung der im Molekularstrahl erzeugten Spektrallinien wird berechnet. Die Abschätzung der bei Anregung durch Elektronenstoß erreichbaren Leuchtintensität zeigt in Übereinstimmung mit Vorversuchen am Cd-Atomstrahl, daß der Molekularstrahl als Lichtquelle nicht nur für die Erzeugung scharfer Spektrallinien, sondern auch für die Untersuchung der Anregungsfunktion ausreichende Intensität ergibt.

Die Möglichkeit der Auflösung enger Linienstrukturen wird nicht begrenzt durch das augenblicklich erreichbare Auflösungsvermögen der Spektralapparate, sondern durch die Linienbreite, welche als Folge des Dopplereffektes der Molekularbewegung auftritt. Z. B. wäre es bei Benutzung eines Interferenzspektroskops mit dem noch ohne besondere Schwierigkeiten erzielbaren Auflösungsvermögen von  $6 \cdot 10^6$  möglich, zwei Linien von der Wellenlänge der grünen Quecksilberlinie noch bei einem Abstand von  $3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  zu trennen. Selbst bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs würde jedoch die durch den Dopplereffekt bedingte Breite der grünen Quecksilberlinie noch  $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  betragen, und also die Auflösung verhindern. Den einzigen Weg zur weiteren Herabsetzung der Dopplerbreite bietet die Benutzung eines Molekularstrahles. Bei Beobachtung senkrecht zur Strahlrichtung werden die Geschwindigkeitskomponenten in der Beobachtungsrichtung und damit auch die durch den Dopplereffekt erzeugte Linienbreite klein. Auf diesem Wege ist die Erzeugung von so scharfen Linien möglich, daß selbst für Elemente mit kleinem Atomgewicht eine volle Ausnutzung des erreichbaren Auflösungsvermögens, und sogar eine einwandfreie Bestimmung der für das Auflösungsvermögen entscheidenden Apparateverteilung auch für die höchstauf lösenden Spektralapparate möglich wird.

Schon Dunoyer<sup>1)</sup> hat gezeigt, daß ein Na-Atomstrahl durch Einstrahlung der Resonanzlinien zur Lichtemission angeregt werden kann. Mit dieser Art der Anregung ist die Struktur der roten Li-Linien von Bogros<sup>2)</sup> und die der D-Linien des Natriums von Dobrezov und Terenin<sup>3)</sup>

---

<sup>1)</sup> L. Dunoyer, C. R. **157**, 1068, 1913; Le Radium **10**, 400, 1913. —  
<sup>2)</sup> A. Bogros, C. R. **183**, 124, 1926. — <sup>3)</sup> L. Dobrezov u. A. Terenin, Naturwissenschaft. **16**, 656, 1928.

untersucht worden. Ebenso wie die Resonanzfluoreszenz zur Erzeugung scharfer Emissionslinien, kann auch die Absorption im Molekularstrahl zur Erzeugung scharfer Absorptionslinien benutzt werden. Dieser letzte Weg ist von Jackson und Kuhn<sup>1)</sup> bei der Untersuchung der roten K-Linie und der D-Linien gewählt worden. Sowohl die Benutzung der Resonanzfluoreszenz wie die der Absorption ist auf wenige vereinzelte Spektrallinien beschränkt. Die Benutzung des Molekularstrahles für beliebige Linien ist nur bei elektrischer Anregung des Leuchtens möglich. Derartige Versuche mit Cd- und Li-Atomstrahlen sind, während die vorliegende Untersuchung schon im Gange war, von Bogros und Esclangon<sup>2)</sup> mitgeteilt worden. Die Atomstrahlen verliefen dabei nicht im Hochvakuum, sondern in Argon von  $2 \cdot 10^{-3}$  mm Hg. Die Anregung erfolgte durch eine Hochfrequenzentladung. Bei dem benutzten Argondruck ist die freie Weglänge der Cd-Atome etwa 15 mm. Ein einwandfreier Atomstrahl ist also nur in den ersten Millimetern über dem Ofenspalt vorhanden. Es erscheint fraglich, ob unter diesen Bedingungen die mit dem Molekularstrahl erreichbare Verschärfung der Linien auch nur einigermaßen voll ausgenutzt werden kann.

Die einzige Methode, einen im Hochvakuum laufenden Molekularstrahl elektrisch anzuregen, ist die Beschießung mit Elektronen. Es könnte zunächst fraglich erscheinen, ob die kleinen Dichten, die sich im Strahl nur erreichen lassen, die Erzielung einer Lichtintensität zulassen, die für die Untersuchung mit hochauflösenden Spektralapparaten ausreichend ist. Daß sich genügende Intensität erreichen läßt, zeigten Vorversuche an Na-Atomstrahlen. Unter Umständen ist es nicht unwesentlich, daß im Molekularstrahl mit der Herabsetzung der Dichte eine Herabsetzung der Linienbreite verbunden ist und infolgedessen die Scheitelintensität der Linie nur ungefähr mit der Wurzel aus der Dichte abnimmt. In einer anschließenden Arbeit sind Messungen an der roten Cd-Linie bei Anregung durch Elektronenstoß im Molekularstrahl mitgeteilt. Für die Auswertung dieser Messungen war die Kenntnis der theoretisch zu erwartenden Intensitätsverteilung einer Linie im Molekularstrahl erforderlich. Auf Grund dieser Berechnung, die hier durchgeführt werden soll, läßt sich der Anwendungsbereich des Molekularstrahls als Lichtquelle ziemlich vollständig übersehen.

Es sei  $d\mathcal{F}_1 = dx_1 dy_1$  ein Element der Ofenöffnung, die in der  $x$ - $y$ -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems liege.  $d\mathcal{F}_2 = dx_2 dy_2$  sei ein

<sup>1)</sup> D. A. Jackson u. H. Kuhn, Nature **134**, 25, 1934; Proc. Roy. Soc. London (A) **148**, 335, 1935. — <sup>2)</sup> A. Bogros u. F. Esclangon, C. R. **195**, 369, 1932.

Element der Abbildeöffnung, die in der Höhe  $z = h$  in einer zur  $x$ - $y$ -Ebene parallelen Ebene liege. Beobachtet wird die Ausstrahlung in der  $x$ -Richtung von einem Volumenelement  $d\tau_3 = dx_3 dy_3 dz_3$  in der Höhe  $z = l$  über der  $x$ - $y$ -Ebene.

Ist  $N_k$  die Dichte der Atome im oberen Zustand der Linie in diesem Volumenelement und  $A$  die Übergangswahrscheinlichkeit der Linie mit der Schwingungszahl  $v_0$ , so wird die in der  $x$ -Richtung beobachtete Gesamtintensität  $J$  bezogen auf  $1 \text{ cm}^2$  strahlende Fläche und auf den ganzen Raum

$$J = A h v_0 N_k dx_3. \quad (1)$$

Ist  $N$  die Dichte aller betrachteten Atome, unabhängig von ihrem Anregungszustand, und wird zur Abkürzung die als Maß für die Stärke der Anregung und die Absolutintensität der Linie geeignete Größe  $C = A h v_0 N_k / N$  eingeführt, so wird

$$J = C N dx_3. \quad (2)$$

Um die Intensitätsverteilung zu berechnen, muß die Dichte  $N$  als Funktion der Geschwindigkeitskomponenten in der Beobachtungsrichtung berechnet werden.

Es seien  $u$ ,  $v$  und  $w$  die Geschwindigkeitskomponenten der Atome in der  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung. Dann gilt für die von  $df_1$  über  $df_2$  nach  $d\tau_3$  fliegenden Atome

$$u : v : w = x_3 - x_1 : y_3 - y_1 : l. \quad (3)$$

Die pro sec aus  $df_1$  in die Richtung  $(u, v, w)$  tretende Anzahl der Atome mit Geschwindigkeitskomponenten zwischen  $u$  und  $u + du$ ,  $v$  und  $v + dv$ ,  $w$  und  $w + dw$  ist unter der Voraussetzung molekularer Strömung

$$\frac{n}{\pi^{3/2} \alpha^3} w e^{-\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{\alpha^2}\right)} du dv dw dx_1 dy_1. \quad (4)$$

Dabei ist  $n$  die Dichte der Atome im Ofen,  $\alpha = \sqrt{2 R T / M}$  die wahrscheinlichste Geschwindigkeit,  $T$  die Temperatur des Ofens,  $M$  das Atomgewicht und  $R$  die Gaskonstante. Setzt man  $x_3 - x_1 = \eta$ ,  $y_3 - y_1 = \zeta$ , so wird mit

$$u = \xi, \quad v = \frac{\xi \zeta}{\eta}, \quad w = \frac{\xi l}{\eta}$$

die austretende Anzahl

$$\frac{n}{\pi^{3/2} \alpha^3} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2} \left(1 + \frac{\zeta^2 + l^2}{\eta^2}\right)} \cdot \frac{\xi^3 l^2}{\eta^4} d\xi d\eta d\zeta dx_1 dy_1. \quad (4a)$$

Durch Division mit  $w \cdot dx_3 dy_3 = \frac{\xi l}{\eta} d\eta d\zeta$  ergibt sich daraus die Dichte der Atome mit einer Geschwindigkeitskomponente in der  $x$ -Richtung zwischen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$

$$N(\xi) d\xi = \frac{n}{\pi^{3/2} \alpha^3} e^{-\frac{\xi^2}{a^2} \left(1 + \frac{\zeta^2 + l^2}{\eta^2}\right)} \cdot \frac{\xi^2 l}{\eta^3} d x_1 d y_1 d \xi. \quad (5)$$

Berücksichtigt man, daß für die in der  $x$ -Richtung beobachtete Schwingungszahl  $v$

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \frac{\xi}{c}$$

gilt, so ergibt sich mit (5) aus (2) die zu beobachtende Intensitätsverteilung

$$J(v) dv = C \frac{n}{\pi^{3/2} b^{3/2}} (v - v_0)^2 e^{-\frac{(v - v_0)^2}{b^2} \left(1 + \frac{\zeta^2 + l^2}{\eta^2}\right)} \cdot \frac{l}{\eta^3} d\eta dx_1 dy_1 dv. \quad (6)$$

Dabei ist  $v_0 \alpha / c = b$  gesetzt.  $b$  ist der Abstand von der Linienmitte, in dem für das Gas im Ofen die Intensität der Dopplerverteilung auf  $1/e$  der Maximalintensität gesunken ist. Durch Integration von (6) über die Flächen der Ofen- und der Abbildeöffnung ergibt sich die jeweils zu erwartende Intensitätsverteilung.

Die Integration läßt sich leicht ausführen, wenn Ofen und Abbildeöffnung in der  $x$ - $z$ -Ebene übereinander liegende, der  $x$ -Richtung parallele Spalte beliebiger Länge sind. Es ist leicht einzusehen, daß die Intensitätsverteilung bei einer Vertauschung der beiden Spalte ungeändert bleibt, wenn die Mitten der beiden Spalte senkrecht übereinander liegen. In diesem Falle kann jedem der Fäden, aus denen man sich den Molekularstrahl zusammengesetzt denken kann, nach dem Vertauschen der Spalte ein in der gleichen Richtung laufender Faden zugeordnet werden. Der Beitrag, welchen jeder Faden nach (6) zur Intensitätsverteilung liefert, hängt bei festgehaltener Höhe  $l$  der Beobachtungsstelle über dem Ofenspalt nur von der Richtung des Fadens ab. Die aus der Integration hervorgehende Intensitätsverteilung bleibt also ungeändert, da beim Vertauschen der Spalte nur die Anordnung der Fäden geändert wird.

Sind  $s_1$  und  $s_2$  die Längen der Spalte ( $s_2 \leq s_1$ ), so wird, wenn  $a = dy$  die Breite des Ofenspaltes ist,

$$\begin{aligned} J(v) dv &= C \frac{n a}{2 \pi^{3/2}} \frac{h}{l} e^{-\left(\frac{v-v_0}{b}\right)^2} \cdot \left\{ \frac{s_1 + s_2}{2h} e^{-\left(\frac{2h}{(s_1+s_2)} \frac{(v-v_0)}{b}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{s_1 - s_2}{2h} e^{-\left(\frac{2h}{(s_1-s_2)} \frac{(v-v_0)}{b}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{(v-v_0)}{b} \left[ \Phi\left(\frac{2h}{(s_1+s_2)} \frac{(v-v_0)}{b}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi\left(\frac{2h}{(s_1-s_2)} \frac{(v-v_0)}{b}\right) \right] \right\} \frac{dv}{b}. \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Es läßt sich zeigen, daß bei festgehaltener Maximalintensität die Breite der Verteilung am kleinsten wird, wenn Ofen- und Abbildespalt gleich lang sind. In diesem Falle geht (7) über in

$$J(\nu) d\nu = C \frac{n a}{2 \pi^{3/2}} \frac{h}{l} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} \left\{ \frac{s}{h} e^{-\left(\frac{h}{s} \frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{|\nu - \nu_0|}{b} \left[ \Phi\left(\frac{h}{s} \frac{|\nu - \nu_0|}{b}\right) - 1 \right] \right\} \frac{d\nu}{b}. \quad (8)$$

In der anschließenden Arbeit ist als Abbildeöffnung außer einem Spalt mit der gleichen Länge wie die des Ofenspaltes auch eine kreisförmige Öffnung mit einem gegen die Länge des Ofenspaltes kleinen Durchmesser benutzt worden. Man erhält in diesem Falle dieselbe Verteilung wie bei zwei Spalten, bei denen die Länge  $s_2$  des kürzeren klein gegenüber der Länge  $s_1$  des längeren Spaltes ist. Es wird dann

$$J(\nu) d\nu = C \cdot \frac{n a}{2 \pi^{3/2}} \frac{s_2}{l} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{2h}{s_1}\right)^2\right)} \frac{d\nu}{b}. \quad (9)$$

Zum Vergleich sei auch noch die Dopplerverteilung angegeben, die in dem Gas im Ofen beobachtet werden würde:

$$J(\nu) d\nu = C \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} \cdot \frac{d\nu}{b}. \quad (10)$$

Ein Vergleich von (10) und (8) zeigt, daß die Verteilung im Strahl sich von der Verteilung im Gase auch durch ihre Form unterscheidet. Die Form der Verteilung (8) im Strahl ändert sich, wenn das Verhältnis der für die Ausblendung des Molekularstrahles maßgebenden Größen  $s$  und  $h$  geändert wird. Dagegen ändert die Verteilung (9) im Strahl bei Änderung von  $s_1/h$  nur ihre Breite, aber nicht die mit der Verteilung im Gas übereinstimmende Form. Wenn die Breite  $a$  des Ofenspaltes wächst, bleibt die Verteilung (8) mit sehr großer Annäherung erhalten, solange  $a$  klein gegen  $h$  ist. (8) gilt also auch für eine quadratische Ofenöffnung mit der Kantenlänge  $s$ , wenn nur  $s$  klein gegen  $h$  ist. Für runde Ofen- und Abbildeöffnungen läßt sich die Intensitätsverteilung nur durch numerische Integration berechnen. Die Durchführung an einem Beispiel ergab, daß für gleich große kreisrunde Ofen- und Abbildeöffnungen eine Verteilung auftritt,

die in der Nähe des Intensitätsmaximums merklich breiter, in den Randteilen aber etwas schmäler ist, als bei zwei gleich langen Spalten, deren Länge gleich dem Durchmesser der kreisrunden Öffnung ist.

Die ausgezogene Kurve in Fig. 1 gibt die Verteilung (8) für den in der anschließenden Arbeit benutzten Fall  $h/s = 5,5$  wieder. Die eingezeichnete

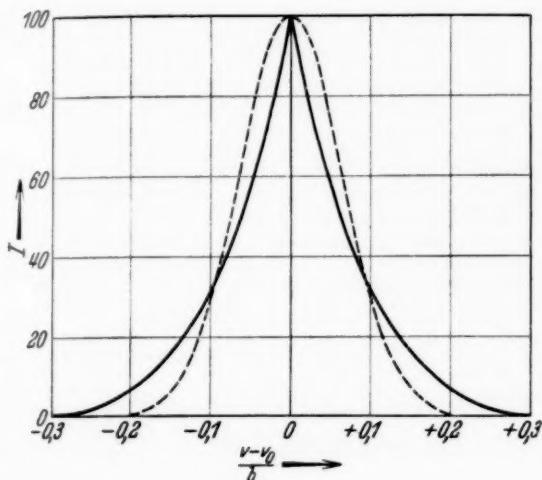


Fig. 1.

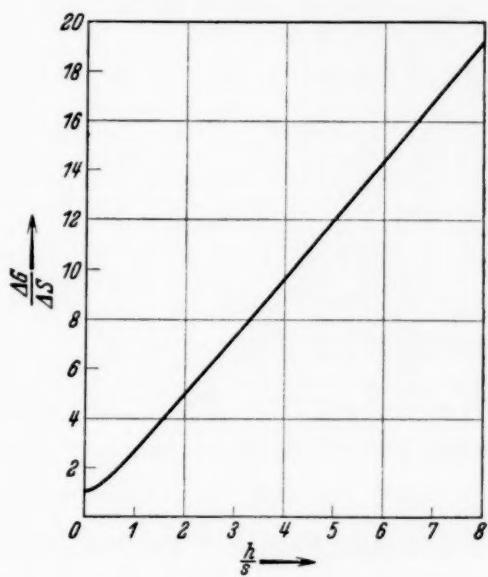


Fig. 2.

gestrichelte Kurve, die der Verteilung (9) mit  $h/s_1 = 5,5$  entspricht, hat die Form der üblichen Dopplerverteilung im Gas.

Für die Halbwertesbreite der Verteilung (8) als Funktion von  $h/s$  lässt sich kein einfacher Ausdruck angeben. In Fig. 2 ist das Verhältnis der Halbwertesbreite  $\Delta_G$  des Gases im Ofen nach (10) zur Halbwertesbreite  $\Delta_s$  im Strahl nach (8) eingetragen. Für  $h/s > 1$  gilt mit großer Annäherung

$$\left. \begin{aligned} \Delta_s &= 0,41 \frac{s}{h} \Delta_G \\ &= \frac{2,94 \cdot 10^{-7}}{\lambda} \frac{s}{h} \sqrt{\frac{T}{M}} \Delta_G \text{ cm}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$\Delta_G/\Delta_s$  ist ein Maß für die erreichte Verschärfung.

Für die Leistungsfähigkeit des Molekularstrahls als Lichtquelle ist es von entscheidender Bedeutung, welche Einbuße an Intensität mit der Verschärfung der Linien verbunden ist. Je nachdem die beobachtete Linie von dem benutzten Spektralapparat vollständig aufgelöst wird oder nicht, ist die Scheitelintensität oder die Gesamtintensität der Linie ausschlaggebend. Die Scheitelintensität wird nach (8)

$$J_m d\nu = C \frac{n a}{2 \pi^{3/2}} \frac{s}{l} \frac{d\nu}{b}. \quad (12)$$

Für die Gesamtintensität ergibt sich durch Integration von (8) über alle Schwingungszahlen

$$E = C \frac{n a}{2\pi} \frac{h}{l} \left[ \sqrt{\frac{s^2}{h^2} + 1} - 1 \right]. \quad (13)$$

Die Intensität läßt sich natürlich nicht durch Erhöhung des Dampfdruckes im Ofen beliebig steigern. Es muß die freie Weglänge des Gases im Ofen mindestens gleich der Breite des Ofenspaltes sein. Wird bei Erhöhung des Dampfdruckes die freie Weglänge kleiner als die Spaltbreite, so bildet sich vor dem Spalt eine Dampfwolke aus. Dann bekommt der Strahl unscharfe Ränder, was hier nicht von Bedeutung ist, die Dichte im Strahl bleibt jedoch dann trotz wachsender Dichte im Ofen zunächst konstant und nimmt sogar schließlich ab<sup>1)</sup>. Der Maximalwert der Intensität ist zu erwarten, wenn die Spaltbreite etwa gleich der freien Weglänge im Ofen ist. Man erhält also aus (12) und (13) die maximal erreichbaren Intensitäten mit

$$n a = \frac{0,7}{\pi \sigma^2},$$

wenn  $\sigma$  der Atomdurchmesser ist. Um ein anschauliches Bild von den im Molekularstrahl erreichbaren Intensitäten zu erhalten, vergleicht man zweckmäßig die Intensitäten nach (12) und (13) im Strahl mit den Intensitäten, die nach (10) bei gleicher Stärke der Anregung im Gase bei bestimmter Dichte und Schichtlänge auftreten. Der Druck des Vergleichsgases bei 0° C und bei einer Schichtlänge von 1 cm, bei dem die Scheitelintensität im Strahl gleich der Scheitelintensität im Gase wird, ergibt sich mit  $\sigma = 3 \cdot 10^{-8}$  cm zu

$$p_m = 1,07 \frac{s}{l} \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}. \quad (14)$$

Der entsprechende Druck, bei dem die Gesamtintensitäten gleich sind, wird

$$p = 1,07 \frac{h}{l} \left[ \sqrt{\frac{s^2}{h^2} + 1} - 1 \right] \cdot 10^{-3} \text{ mm Hg}. \quad (15)$$

Danach wird z. B. mit  $s = 1$  cm,  $h = 4$  cm und  $l = 5$  cm, also unter Bedingungen, die den in der anschließenden Arbeit benutzten ähnlich sind, die Gesamtintensität ebenso groß wie beim Gase von  $3 \cdot 10^{-5}$  mm Hg bei 1 cm Schichtlänge und bei gleicher Anregung, dagegen die Scheitelintensität wie beim Gase von  $2 \cdot 10^{-4}$  mm Hg. Dabei ist die Linie nach (11) rund zehnmal schärfer als im Gase.

---

<sup>1)</sup> F. Knauer u. O. Stern, ZS. f. Phys. **39**, 755, 1926; M. Kratzenstein, ebenda **93**, 289, 1935.

Welche Verschärfung der Linie praktisch noch benutzt werden kann und welches Auflösungsvermögen infolgedessen voll ausgenutzt werden kann, hängt natürlich ab von der photographischen Intensität der zu untersuchenden Linie und der Lichtstärke des Spektralapparates. Will man das Auflösungsvermögen voll ausnutzen, so darf die Halbwte der Linie höchstens gleich der Halbwte der Apparateverteilung sein. In diesem Fall wird die Gesamtintensität beobachtet, die wie der Vergleich von (15) und (11) zeigt, bei großer Verschärfung der Linie umgekehrt mit dem Quadrat der Verschärfung abnimmt. Da die auf die photographische Platte fallende Intensität dem Quadrat des Öffnungsverhältnisses  $A$  der Kamera des Spektralapparates proportional ist, wird die praktisch ausnutzbare Verschärfung diesem Öffnungsverhältnis proportional. In der anschließenden Arbeit konnte die rote Cd-Linie bei rund 13facher Verschärfung und einem Öffnungsverhältnis 1:17 bei Anregung durch Elektronenstoß mit Belichtungszeiten von 3 Stunden untersucht werden. Für eine Linie von der photographischen Intensität der roten Cd-Linie wird danach die bei diesen Belichtungszeiten ausnutzbare Verschärfung etwa  $V = 200 A$ . Nach (11) wird bei dem Auflösungsvermögen  $3 \cdot 10^8 A \cdot \sqrt{M/T}$  die Halbwte der Apparateverteilung gleich der Halbwte der verschärferten Linie. Dieses Auflösungsvermögen ist also das größte, daß für eine Linie von der photographischen Intensität der roten Cd-Linie unter den Anregungsbedingungen und bei den Belichtungszeiten der anschließenden Arbeit ausgenutzt werden kann.

Bei der praktischen Durchführung der Versuche muß der zum Leuchten angeregte Molekularstrahl auf den Spalt des Spektralapparates abgebildet werden. Dabei müssen notwendig auch Beobachtungsrichtungen benutzt werden, die entgegen den bei der Berechnung der Intensitätsverteilung gemachten Voraussetzungen gegen die Strahl-( $z$ )-Richtung und die Längs-( $x$ )-Richtung von Ofen- und Abbildespalt geneigt sind. Die Verteilung, die bei Benutzung einer solchen Beobachtungsrichtung auftritt, und erst recht die daraus durch Integration zu berechnende Verteilung, die bei Abbildung mit einem Büschel endlicher Öffnung auftritt, lassen sich nur durch graphische Integration berechnen. Auf diesem Wege wurde sichergestellt, daß unter den in der anschließenden Arbeit vorliegenden Bedingungen keine merklichen Abweichungen von den nach (8) und (9) berechneten Verteilungen hervorgerufen werden. Eine ungefähre Abschätzung der zu erwartenden Abweichungen ist auf folgendem Wege möglich. Die Drehung der Beobachtungsrichtung um die Molekularstrahlrichtung gegen die Rich-

tung der Spalte ist offenbar belanglos, solange der Winkel klein gegenüber dem Verhältnis von Breite zu Länge des Abbildespaltes ist. Da die Spaltbreite, wie oben (S. 278) erwähnt, ohne Einfluß auf die Verteilung ist, ist es immer ohne Schwierigkeiten möglich, den Einfluß dieser Drehung unmerklich zu machen, indem man die Breite des Ofenspaltes genügend groß wählt. Eine Neigung der Beobachtungsrichtung gegen die zur Strahlrichtung senkrechte Richtung hat eine Verschiebung des Intensitätsmaximums und eine unsymmetrische Verbreiterung der Verteilung zur Folge. Bei kleinem Neigungswinkel kann die dann auftretende Verteilung näherungsweise durch die Verteilung ersetzt werden, die man erhält, wenn bei Beobachtung senkrecht zur  $z$ -Richtung die Verbindungsline der Mitten von Ofen- und Abbildespalt nicht der  $z$ -Richtung parallel ist, sondern um den Neigungswinkel von ihr abweicht. Diese Verteilung läßt sich ohne Schwierigkeiten berechnen. Die Verbreiterung bleibt danach unmerklich, solange der Neigungswinkel klein gegen das Verhältnis von Spaltlänge zu Spaltabstand ist, auch wenn die Verschiebung des Maximums der Verteilung schon merklich ist. Die Beobachtung mit einem geöffneten Büschel ruft sicher dann keine merkliche Abweichung hervor, wenn die Verschiebung des Maximums zwischen der am stärksten und der am schwächsten gegen die  $z$ -Richtung geneigten Richtung des Büschels klein ist gegenüber der Halbwteite der Verteilung. Durch verkleinerte Abbildung des Molekularstrahles auf den Spektrographenspalt läßt sich auch bei großem Öffnungsverhältnis des Kollimators erreichen, daß die Öffnung des Büschels keine Verbreiterung der beobachteten Verteilung hervorruft.

Die Benutzung des Molekularstrahles dürfte nicht nur für die Erzeugung scharfer Linien, sondern auch für die Untersuchung der Anregungsfunktion Vorteile gegenüber Messungen im Gas bieten, weil im Molekularstrahl alle Sekundärprozesse, wie z. B. Wiedervereinigungsleuchten und Anregung durch Ionenstoß, soweit als möglich ausgeschaltet sind. Da für diesen Verwendungszweck die Verschärfung der Linie nebensächlich ist, braucht dabei die Spaltlänge nicht klein gegenüber dem Abstand von Ofen- und Abbildespalt zu sein. Die erreichbaren Gesamtintensitäten dürften nach (15) dann leicht ebenso groß gemacht werden können, wie beim Gase von etwa  $10^{-3}$  mm Hg bei 1 cm Schichtlänge und bei gleicher Anregung. Das entspricht Bedingungen, die bei den bisherigen Messungen von Anregungsfunktionen im Gase benutzt worden sind. Die in der anschließenden Arbeit benutzte Apparatur war für Untersuchungen mit geringer Verschärfung und großer Intensität nicht geeignet. Einige Probeaufnahmen des Cd-Spektrums mit einem kleinen Quarzspektrographen

ergaben, daß die Intensitäten jedenfalls die erwartete Größenordnung haben. Diese Aufnahmen zeigen Abweichungen der Relativintensitäten der Linien gegenüber den von Larché<sup>1)</sup> gemessenen in dem Sinne, daß bei Voltgeschwindigkeiten zwischen 100 und 200 Volt die Singulettlinien gegenüber den Tripletlinien verstärkt sind. Diese qualitative Feststellung, die noch der Bestätigung durch quantitative Messungen am Molekularstrahl bedarf, ist vielleicht im Zusammenhang damit nicht ohne Bedeutung, daß die theoretische Berechnung der Anregungsfunktionen<sup>2)</sup> bei großen Elektronengeschwindigkeiten für Tripletlinien einen rascheren Abfall der Intensität mit wachsender Elektronengeschwindigkeit ergibt als für Singulettlinien, während die Messungen von Larché das entgegengesetzte Verhalten zeigen.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

---

<sup>1)</sup> K. Larché, ZS. f. Phys. **67**, 440, 1931. — <sup>2)</sup> N.-F. Mott u. H. S. W. Massey, The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1933, S. 197, dort weitere Literaturangaben.

# Die Intensitätsverteilung der roten Cd-Linie im Molekularstrahl bei Anregung durch Elektronenstoß.

Von R. Minkowski und H. Bruck in Hamburg.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 9. April 1935.)

Die Intensitätsverteilung der roten Cd-Linie im Molekularstrahl bei Anregung durch Elektronenstoß wird in Abhängigkeit von der Ausblendung des Molekularstrahls untersucht. Die Messungen führen zur Bestimmung der wahren, vom Doppler-Effekt befreiten Intensitätsverteilung der Linie. Die Linie besteht aus mehreren, wegen der großen natürlichen Breite nicht auflösbaren Komponenten in einem Bereich von  $2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ . Eine Diskussion der Intensitätsverteilung ergibt, daß für die Struktur der Linie vermutlich die Isotopenverschiebung wesentlich ist mit einem Abstand zwischen den Linien zweier benachbarter gerader Isotope von  $5 (\pm 2) \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ .

## 1. Einleitung.

Das Ziel dieser Untersuchungen war, die Intensitätsverteilung einer Spektrallinie im Molekularstrahl bei Anregung durch Elektronenstoß zu messen und mit der berechneten Intensitätsverteilung<sup>1)</sup> zu vergleichen. Die Messungen wurden an der roten Cd-Linie durchgeführt, weil die vorliegenden Untersuchungen über ihre Struktur dafür sprachen, daß die Hyperfeinstruktur dieser Linie so eng sei, daß sie sich nicht störend bemerkbar machen würde. Selbst wenn diese Annahme nicht zutreffend war, wie es nach den hier mitgeteilten Messungen der Fall ist, konnte erwartet werden, Aussagen über die Struktur der Linie zu erhalten, die mit Rücksicht darauf nicht ohne Interesse sind, daß die rote Cd-Linie das primäre Wellenlängen-normal ist.

## 2. Versuchsanordnung und Meßmethoden.

a) *Der Molekularstrahlapparat.* Die Anordnung zur Erzeugung des Molekularstrahles war an dem abnehmbaren Deckel eines zylindrischen Messinggefäßes von 30 cm Höhe und 18 cm Durchmesser angebracht. Die Elektroden, welche zur Beschleußung des Molekularstrahles mit Elektronen benutzt wurden, wurden durch Schlitte an der Seitenwand des Gefäßes eingeführt. An der vorderen und hinteren Durchstoßstelle der zur Strahlrichtung und zur Stoßrichtung senkrechten Beobachtungsrichtung durch die Wand des Gefäßes war je ein Beobachtungsfenster auf einen nach außen etwas herausragenden Stutzen aufgekittet. Fig. 1 zeigt den Deckel mit den wesentlichen Teilen der Anordnung.

---

<sup>1)</sup> R. Minkowski u. H. Bruck, ZS. f. Phys. **95**, 274, 1935 (im folgenden zitiert als I).

An einem in den Schliff 1 eingelöteten Rohr  $R_1$ , in dessen Innerem die elektrischen Leitungen für den Ofen eingekittet waren, wurde der Ofen durch einen Träger  $T$  aus Konstantan gehalten. Der Ofen war zur Justierung nach Höhe und Seite verstellbar und um seine vertikale Achse drehbar. Er bestand aus einem vertikal stehenden Kupferröhrchen  $O$ , auf dessen oberes Drittel eine Heizwicklung  $H$  aus Chromnickeldraht mit Isolierung durch Glasperlen angebracht war. Zur Herabsetzung der Strahlungsverluste war der Ofen von den zwei gestrichelt eingezeichneten konzentrischen Metallzylindern  $Z$  umgeben<sup>1)</sup>. Auf der oberen Fläche des Ofens war der 1 cm lange Austrittsspalt  $S_1$  angebracht. Die Breite des Ofenspaltes war verstellbar; im allgemeinen wurde eine Breite von 0,2 mm benutzt. Die Temperatur des Ofens wurde mit einem angelöteten Kupfer-Konstantan-Thermoelement mit einer Genauigkeit von  $\pm 10^\circ\text{C}$  gemessen. Größere Genauigkeit war wegen der schwachen Abhängigkeit des Doppler-Effektes von der Temperatur nicht erforderlich. An einem in den Schliff 2 eingelöteten gezogenen Neusilberrohr  $R_2$  waren über dem Ofen zwei konzentrische, waagerecht liegende runde Kupferscheiben  $P_1$  und  $P_2$  in einem vertikalen Abstand von 5 cm voneinander angebracht. In die untere Scheibe waren die Abbildungsspalte eingearbeitet. Auf diesem Wege war es möglich, den Abbildespalt  $S_2$  durch Drehen des Schliffes 2 ohne Öffnen des Apparates aus-

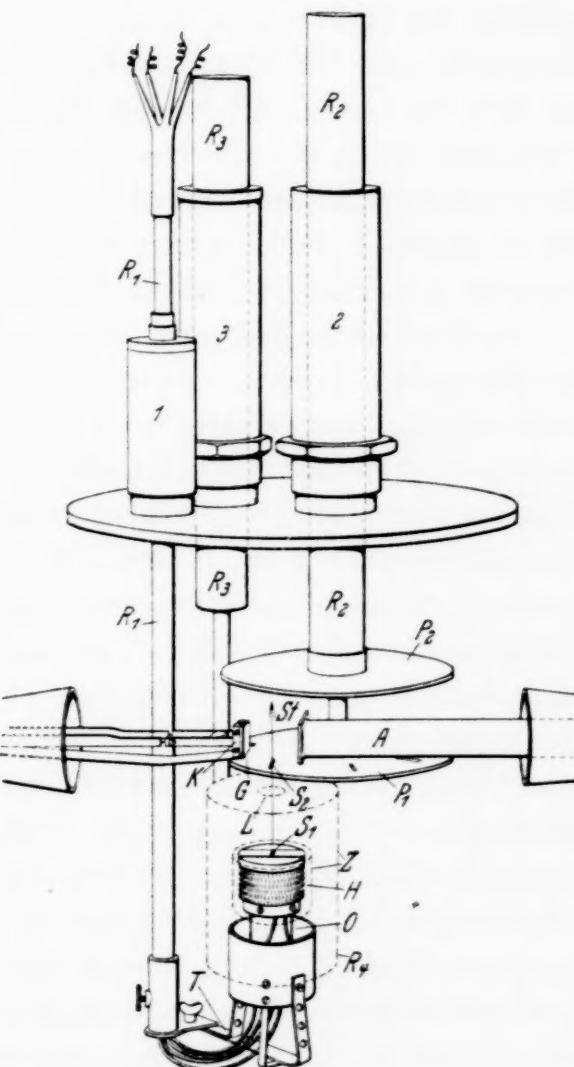


Fig. 1.

<sup>1)</sup> Anmerkung bei der Korrektur. In der Figur ist versehentlich nur eines dieser Schutzrohre eingezeichnet.

zuwechseln, sobald der Abbildespalt durch Kondensation des verdampften Metalls zugewachsen war. An der oberen Scheibe kondensierten die Atome aus dem Strahl. Die meisten Versuche wurden mit Abbildespalten von 1 cm Länge und 0,2 cm Breite ausgeführt. Um bequem mit einem größeren Öffnungswinkel des Strahles arbeiten zu können, wurden bei einem Versuch an Stelle der Spalte runde Löcher von 0,2 cm Durchmesser benutzt. Um den seitlich aus dem Ofenspalt strömenden Dampf zu kondensieren, war der Ofen von einem Kupferrohr  $R_4$  mit eingelötetem Deckel umgeben, Der Deckel besaß ein den benutzten Abbildespalt freigebendes Loch  $L$ . Das Kupferrohr  $R_4$  wurde von einem in dem Schliff 3 eingelötzten Neusilberrohr  $R_3$  gehalten. Zur Kühlung der Metallteile wurden die Neusilberrohre in Schliff 2 und 3 mit flüssiger Luft gefüllt.

Die Beobachtungsrichtung war der Längsrichtung des Abbilde- und des Ofenspaltes parallel. Senkrecht zur Beobachtungsrichtung und zur Laufrichtung  $St$  des Strahles wurde mit Elektronen beschossen. In Fig. 1 ist rechts die wassergekühlte Anode  $A$ , links die Glühkathode  $K$  mit dem Gitter  $G$ . Der Molekularstrahl lief zwischen Gitter und Anode, die einen Abstand von etwa 1 cm hatten. Die Anode war ein Kupferblech von  $2 \times 2 \text{ cm}^2$  Fläche. Das Gitter bestand aus einem weitmaschigen, auf einem Nickelrahmen aufgeschweißten Molybdändrahtnetz mit einer freien Fläche von  $1,6 \times 1,6 \text{ cm}^2$ . Die Glühkathode bestand aus einem 15 cm langen, mit Erdalkalioxyden bedeckten Chromnickeldraht von 0,4 mm Durchmesser, der zickzackförmig eine Fläche von  $1,3 \times 1,3 \text{ cm}^2$  bedeckte. Chromnickeldraht besitzt die angenehme Eigenschaft, auch bei höheren Temperaturen so starr zu sein, daß trotz der großen Länge des Drahtes keine störenden Durchbiegungen der Glühkathode auftraten. Die Gesamtemission betrug bei 200 Volt Gitterspannung 500 mA. Der zur Anregung benutzte Anodenstrom betrug ohne Zugspannung zwischen Gitter und Anode etwa 200 mA. Die Elektronenemission war über die Fläche der Glühkathode hinweg nicht ganz konstant, so daß die Lichtemission des Molekularstrahles schwach von der Höhe über dem Abbildespalt abhing. Bei der benutzten Stromstärke ist die Raumladung zwischen Gitter und Anode bereits merklich, so daß genaue Angaben über die Elektronengeschwindigkeit nicht möglich sind, mit der die Anregung erfolgte. Der Druck im Apparat, der von einer Diffusionspumpe mit einer Sauggeschwindigkeit von 20 Liter/sec evakuiert wurde, konnte bis herab zu  $10^{-4}$  mm Hg mit einem kleinen am Apparat angebrachten Mc Leod-Manometer gemessen werden. Bei kleineren Drucken konnte der Druck aus dem Aussehen der Leuchterscheinung des Restgases zwischen Gitter und Anode geschätzt werden, das aus Vorversuchen

mit einem größeren Mc Leod-Manometer bekannt war. Während der Versuche betrug danach der Druck im Apparat weniger als  $10^{-6}$  mm Hg.

b) Der Spektralapparat. Zur spektralen Zerlegung wurde ein Fabry-Perot-Interferometer mit Vorzerlegung durch ein Prisma benutzt. Die Kamerabrennweite betrug 50 cm. Die etwa 15 mm über dem Abbildespalt liegende Mitte des leuchtenden Teiles des Molekularstrahles wurde verkleinert auf den Spalt des Spektrographen abgebildet. Die Öffnung des Strahlenbündels auf der Seite des Molekularstrahles war 1:23 und war damit genügend klein, um die Intensitätsverteilung nicht zu stören<sup>1)</sup>.

Die benutzten Interferenzplatten hatten 8 cm Durchmesser bei einer benutzten Fläche von 4 cm Durchmesser. Sie wurden durch Kathodenzerstäubung versilbert. Die Abstandstücke der Platten bestanden aus Invar (Indilatans-Extra von Krupp). Für Abstände bis zu 3 cm bestanden die Abstandstücke aus drei an der Innenwand eines Messingzyinders befestigten Invarstäben. Für den Abstand 11 cm wurde ein Invarrohr benutzt, in dessen obere und untere Endfläche je drei etwas herausragende ebene Auflageflächen hineingearbeitet waren. Bei 11 cm Abstand konnte die Justierung gerade noch mit der gelben Kryptonlinie 5871 Å aus einem Geißlerrohr bei Zimmertemperatur in der üblichen Weise mit ausreichender Genauigkeit durchgeführt werden. Im Gegensatz zu der üblichen Anordnung wurde die Feinjustierung nicht durch den Druck einer Schraube oder einer Feder vorgenommen. Vielmehr wurden die Platten horizontal gelagert, um die Feinjustierung durch Beladen mit Gewichten auszuführen. Dazu lag auf dem Rand der oberen Platte ein Ring, auf dem gerade über den drei Auflagepunkten der Platten je ein Messingstäbchen senkrecht aufgelötet war, auf das kleine gelochte Bleigewichte aufgeschoben werden konnten. Durch diese Art der Anordnung wird eine wesentlich geringere Temperaturempfindlichkeit erreicht, als bei der Benutzung von Schrauben und Federn. Das Invarrohr für 11 cm Plattenabstand drückte sich vermöge seines Gewichtes von 1,5 kg langsam — in 30 Stunden etwa um eine halbe Wellenlänge — in die untere Platte ein. Es wurde deshalb durch einen als Gegen gewicht über drei Rollen aufgehängten konzentrischen Messingring entlastet.

Bei 11 cm Abstand mußte auf Konstanz des Luftdruckes geachtet werden, da wegen der Dichteabhängigkeit des Brechungsquotienten der Luft eine Änderung des Barometerstandes um 1 mm eine Verschiebung der Interferenzen um  $1/7$  ihres Abstandes hervorruft. Die Versuche wurden

<sup>1)</sup> Siehe unten S. 295.

in einem Kellerraum mit künstlicher Ventilation durchgeführt. Durch An- und Abstellen der Ab- und Zuluftventilatoren konnten Schwankungen des Barometerstandes bis zu  $\pm 0,4$  mm ausgeglichen werden. Auf diese Weise wurde bei den Versuchen der Luftdruck auf  $\pm 0,05$  mm konstant gehalten. Die Temperatur war auf  $\pm 0,05^{\circ}\text{C}$  konstant.

Die Apparateverteilung des Interferometers wurde aus Messungen mit der roten Cd-Linie bei sehr kleinen Plattenabständen (0,5 und 0,15 cm) bestimmt. Die dabei gemessenen Werte der Halbwelte waren stets groß gegen die mit großen Plattenabständen gemessenen wahren Halbwelten der zur Messung der Apparateverteilung benutzten Linien. Aus diesen bei kleinen Plattenabständen gemessenen Halbwelten wurden deshalb die Halbwelten der Apparateverteilung unter Zuhilfenahme der von van Cittert und Burger<sup>1)</sup> angegebenen Korrekturen berechnet, die im vorliegenden Falle belanglos klein waren. Die kleinste mit dem 11 cm Etalon benutzte Apparatehalbwelle entsprach einem wirksamen Reflexionsvermögen der Versilberung von 81,3%, entsprechend einem Auflösungsvermögen von  $5,1 \cdot 10^6$  bei 11 cm Plattenabstand.

*e) Die Auswertung der Aufnahmen.* Zu allen Aufnahmen wurden Agfa-Superpan-Platten benutzt. Bei Entwicklung mit Rodinal 1 : 20, 6 Minuten, ergaben sich Schleierschwärzungen zwischen 0,01 und 0,02 abs. Die Intensitätsmarken zur photometrischen Auswertung wurden unmittelbar an die Aufnahme anschließend mit derselben Belichtungszeit auf dieselbe Platte gedruckt, zum Teil mit Hilfe eines rotierenden Sektors, zum Teil mit einem Zeissischen Stufenkondensor nach Hansen. Die auf beiden Wegen erhaltenen Schwärzungskurven stimmten innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Die Intensitätsmarken wurden mit den Neonlinien 6402 und 6506 Å gewonnen, welche die rote Cd-Linie einschließen und übereinstimmende Schwärzungskurven ergaben.

Die Platten wurden mit der 40fachen Übersetzung des Koch-Goosschen registrierenden Mikrophotometers photometriert. Bei der Durchmessung der kreisförmigen Interferenzen überdeckt der gerade Spalt des Photometers stets einen kleinen Wellenlängenbereich, dessen Ausdehnung mit abnehmender Länge des Photometerspaltes abnimmt. Bei 11 cm Abstand der Interferenzplatten wird der Durchmesser der mit einer Brennweite von 50 cm aufgenommenen Interferenzen so klein, daß eine zur Mittelung über die Kornschwankungen ausreichende Länge des Spaltes bereits gleichzeitig einen verhältnismäßig großen Wellenlängenbereich überdeckt. Deshalb

<sup>1)</sup> H. C. Burger u. P. H. van Cittert, ZS. f. Phys. **44**, 58, 1927.

wurde zur Auswertung dieser Aufnahmen auch ein Spalt benutzt, der so gekrümmmt war, daß wenigstens für das erste Maximum die durch Spaltlänge und Spaltbreite entstehenden Fehler das Auflösungsvermögen noch nicht merklich herabsetzten.

### 3. Ergebnisse.

Von den erhaltenen Aufnahmen mußten einige von der Auswertung ausgeschlossen werden, bei denen während der verhältnismäßig langen Belichtungszeiten Dejustierungen eingetreten waren. In Tabelle 1 sind für sämtliche zur Auswertung geeigneten Aufnahmen eingetragen die elektrischen Betriebsdaten, die Belichtungszeit und der Schwärzungsbereich für die Interferenzmaxima, deren Intensität auf derselben Aufnahme etwas variierte (siehe oben S. 287). Am Schluß dieser Tabelle sind Angaben für zwei Versuche (Nr. 6 und 7) eingetragen, die nicht mit dem Molekularstrahl, sondern im Cd-Dampf ausgeführt sind. Der Dampf wurde in einem hochevakuierten Glasrohr, das etwas Cd enthielt und in einem elektrischen Ofen geheizt wurde, durch eine Entladung zwischen einer Glühkathode und einer Anode zum Leuchten angeregt. Die Temperatur wurde dabei durch ein an das Rohr anliegendes Thermoelement gemessen.

In den Spalten 2 bis 4 der Tabelle 2 sind für die verschiedenen Versuche die Längen  $s_1$  vom Ofen- und  $s_2$  vom Abbildespalt, sowie der Abstand  $h$  der beiden Spalte angegeben. In Spalte 5 ist der benutzte Abstand der Interferometerplatten und in Spalte 6 die zugehörige Halbwelte der Apparateverteilung eingetragen, die mit der jeweils benutzten Versilberung gemessen worden war. In Spalte 9 sind die gemessenen Werte der Halbwelte der roten Cd-Linie angeführt. Als Halbwelte wird hier und im folgenden stets die ganze Breite der Verteilung bei der Hälfte der Maximalintensität bezeichnet. Da nicht nur die Breite, sondern auch die Form einer im Molekularstrahl erzeugten Linie von der Ausblendung des Molekularstrahles abhängt, ergeben die Halbwelten nur ein unvollständiges Bild der Veränderung der Linie. Sie können aber zunächst zu einer vorläufigen Diskussion der Ergebnisse benutzt werden, die weiter unten durch die Betrachtung der gesamten Intensitätsverteilungen ergänzt werden wird, ohne daß sich eine Änderung der gezogenen Schlüsse ergibt.

In Spalte 7 sind die Halbwelten der Verteilung angegeben, welche für eine streng monochromatische Linie bei der benutzten Ausblendung des Molekularstrahles berechnet wurden<sup>1)</sup>. Bei den Versuchen Nr. 1 bis 4

<sup>1)</sup> Siehe I.

Tabelle 1.

Versuch Nr.	Spannung		Belichtungszeit	Maximale Schwärzung über Schleier $\delta - \delta_0$	Schleier- schwärzung $\delta_0$
	Gitter/Kathode Volt	Anode/Kathode Volt			
1	+ 220	+ 130	0,17	0,287—0,290	0,013
2	220	120	0,17	0,412—0,508	0,010
3	40	50	0,03	0,745—0,783	0,045
4	180	445	0,19	0,985—1,105	0,045
5	200	220	0,18	0,968—1,263	0,093
6	—	—	—	0,630—0,750	0,020
7	—	—	—	0,695	0,020

Tabelle 2.

Versuch Nr.	Länge in cm				Halbwelte in $10^{-2} \text{ em}^{-1}$				berechnet
	Ofenspalt $s_1$	Abbildungs- spalt $s_2$	Spalt- abstand $h$	Etalon- Platten- abstand	Apparate- verteilung	Doppler- verteilung	Apparate- + Doppler- verteilung	beobachtet	
1	1	1	1	5,5	11	0,300	0,205	0,500	1,64 ± 0,1
2	1	1	3	3	11	0,300	0,375	0,63	1,84
3	1	1	3	3	11	0,455	0,375	0,75	1,89
4	1	1	3	3	11	0,455	0,375	0,75	1,94
5	1	0,2	1	3	1,67	1,20	2,30	3,24	(1,64)
6	Dampf			3	0,90	2,65	3,16	3,67 ± 0,2	—
7	Dampf			3	0,90	2,65	3,16	3,60	—

waren Ofen- und Abildespalt gleich lang. Die Intensitätsverteilung wird dann gegeben durch

$$J(\nu) d\nu = C \cdot \frac{n \cdot a}{2 \pi^{3/2}} \frac{h}{l} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} \left\{ \frac{s}{h} e^{-\left(\frac{h(\nu - \nu_0)}{sb}\right)^2} + \frac{|\nu - \nu_0|}{b} \sqrt{\pi} \left[ \Phi\left(\frac{h}{s} \frac{|\nu - \nu_0|}{b}\right) - 1 \right] \right\} \frac{d\nu}{b}. \quad (1)$$

Dabei ist

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Ferner ist  $C$  eine von der Stärke der Anregung und der Übergangswahrscheinlichkeit der Linie abhängige Konstante,  $n$  die Dichte der Atome im Ofen,  $a$  die Breite,  $s$  die Länge und  $h$  der Abstand der Spalte,  $l$  die Höhe der Beobachtungsstelle über dem Ofenspalt, die hier stets um 1,5 cm größer war als  $h$ .  $b = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  ist der Abstand von der Linienmitte, in dem die Intensität einer im Gase von der Temperatur  $T$  des Ofens erzeugten Linie auf  $1/e$  abgesunken ist; dabei ist  $M$  das Atomgewicht,  $R$  die Gaskonstante. Bei Versuch Nr. 5 war die Länge  $s_2$  des Abildespaltes klein gegenüber der Länge  $s_1$  des Ofenspaltes. Die Intensitätsverteilung wird in diesem Falle

$$J(\nu) d\nu = C \frac{n a}{2 \pi^{3/2}} \frac{s_2}{l} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} \left(1 + \left(\frac{2h}{s_1}\right)^2\right) \frac{d\nu}{b}. \quad (2)$$

Versuch Nr. 6 und 7 sind im Cd-Dampf ausgeführt. In diesem Falle gilt die bekannte Doppler-Verteilung für ein Gas

$$J(\nu) d\nu = C \frac{n}{\pi^{1/2}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{b}\right)^2} \frac{d\nu}{b}. \quad (3)$$

In Spalte 8 der Tabelle 2 sind die Halbwelten der Verteilungen angegeben, welche sich durch Überlagerung der in Spalte 6 angegebenen gemessenen Apparateverteilung über die nach 1, 2 oder 3 berechnete Intensitätsverteilung einer monochromatischen Linie ergeben. Die Überlagerung wurde mit graphischer Integration durchgeführt. Die in Spalte 8 angegebenen Halbwelten stellen also die Werte dar, welche gemessen werden müßten, wenn die rote Cd-Linie eine einfache Linie wäre und wenn die Intensitätsverteilung einer monochromatischen Linie mit den berechneten Intensitätsverteilungen übereinstimmen würde. Der Vergleich der berech-

neten Werte in Spalte 8 und der gemessenen Werte in Spalte 9 zeigt, daß die gemessenen Werte stets größer sind als die berechneten. Mit abnehmender berechneter Breite wird auch die gemessene Halbwte kleiner, aber in abnehmendem Maße, je kleiner die berechnete Breite ist. Das legt die Vermutung nahe, daß der Unterschied zwischen den berechneten und den gemessenen Breiten im wesentlichen, wenn nicht ganz, darauf zurückzuführen ist, daß in den gemessenen Verteilungen eine Hyperfeinstruktur der roten Cd-Linie zum Ausdruck kommt.

In diesem Falle ist zu erwarten, daß die in Tabelle 2 unter Nr. 1 eingetragene Messung, bei der die gemessene Halbwte über dreimal so groß wie die in Spalte 8 angegebene ist, mit großer Annäherung die wahre, vom Doppler-Effekt befreite Verteilung ergeben hat. Es muß dann möglich sein, mit Hilfe graphischer Integration aus der Verteilung Nr. 1 die unter anderen Bedingungen beobachteten Intensitätsverteilungen durch Überlagerung der Apparateverteilung und der zugehörigen Doppler-Verteilung in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Messungen zu berechnen. Das ist ohne weiteres möglich in den Fällen, in denen wie bei Nr. 5 und 6 die Halbwte der Apparateverteilung und der Doppler-Verteilung wesentlich größer ist als bei der Messung der wahren Verteilung Nr. 1. Die Berechnung der Verteilung Nr. 2, bei der dies nicht der Fall ist, wird dadurch ermöglicht, daß sie mit der gleichen Apparateverteilung wie Nr. 1 gemessen wurde, so daß nur noch der Doppler-Effekt überlagert zu werden braucht. Die Halbwten der auf diesem Wege berechneten Verteilungen sind in Spalte 10 der Tabelle 2 eingetragen. Sie stimmen vollkommen mit den gemessenen Werten überein. Michelson<sup>1)</sup> hat im Cd-Dampf bei 280° C die Halbwte der Linie zu  $3,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  bestimmt. Auch dieser Wert stimmt gut mit dem entsprechenden aus der Verteilung Nr. 1 berechneten Wert  $3,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  überein. Burger und van Cittert<sup>2)</sup> haben den wesentlich kleineren Wert  $2,75 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  für die Halbwte im Dampf bei 300° C aus Messungen errechnet, bei denen die Apparatebreite ebenso groß oder größer als die wahre Breite der Linie war. Diese Messungen sind zur genauen Bestimmung der wahren Linienbreite wenig geeignet, so daß auf den Unterschied kein Gewicht zu legen sein dürfte. Daß die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung nicht nur auf die Halbwte beschränkt ist, zeigen die Fig. 2 bis 4. In Fig. 2 ist die Verteilung Nr. 1 wiedergegeben, die vermutlich nahe mit der wahren Verteilung übereinstimmt. Die eingetragenen Meßpunkte sind das Ergebnis der Ausmessung des innersten Interferenz-

<sup>1)</sup> A. A. Michelson, Phil. Mag. **34**, 280, 1892. — <sup>2)</sup> H. C. Burger u. P. H. van Cittert, ZS. f. Phys. **44**, 58, 1927.

ringes auf beiden Seiten des Ringzentrums. Die weiter außen gelegenen Interferenzen wurden von der Auswertung ausgeschlossen, weil hier die endliche Größe des Photometerspaltes anfängt, einen merklichen Fehler hervorzurufen. In den Randteilen der Linie wird die Überlagerung benachbarter Ordnungen bereits merklich. Hier kann die Intensitätsverteilung deshalb nur mit verhältnismäßig großer Unsicherheit bestimmt werden. Die ausgezogene Kurve in Fig. 2 gibt den vermutlichen Verlauf der Verteilung in den Randteilen nach Befreiung von dem Einfluß der Überlagerung benachbarter Ordnungen wieder, der bei der graphischen Integration als wahre Verteilung zugrunde gelegt wurde. Die punktierten Kurven zeigen die dabei auftretenden Fehlergrenzen, welche eine Unsicherheit in den berechneten Halbwelthen von maximal  $\pm 5\%$  ergeben. Fig. 3 und 4 geben die Meßpunkte der Verteilungen Nr. 5 und 6. Die eingezeichneten Kurven sind die berechneten Verteilungen, die mit den Messungen vollkommen übereinstimmen.

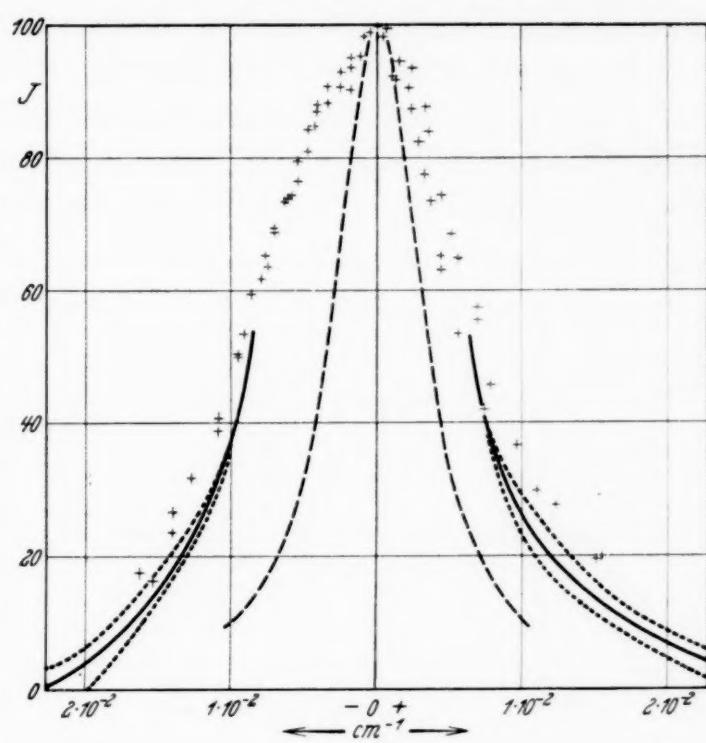


Fig. 2.

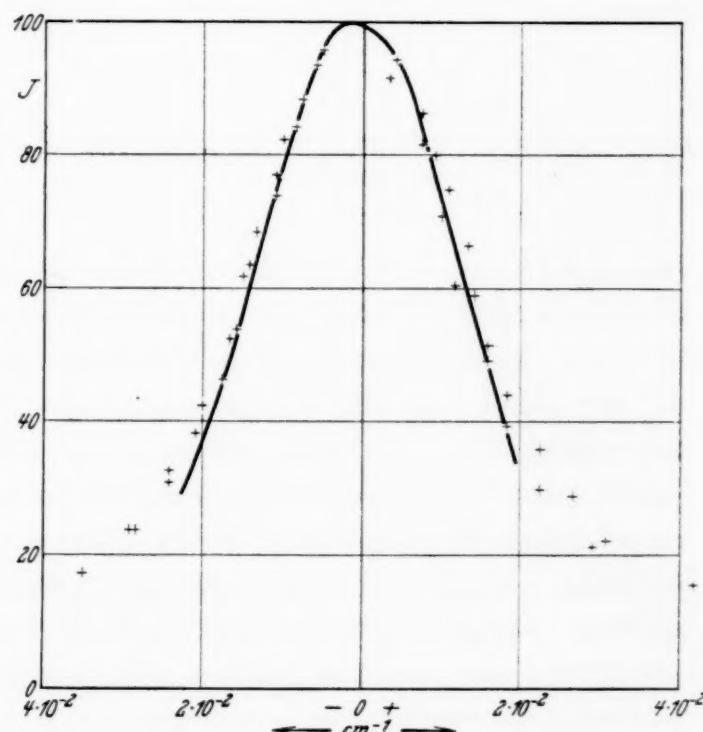
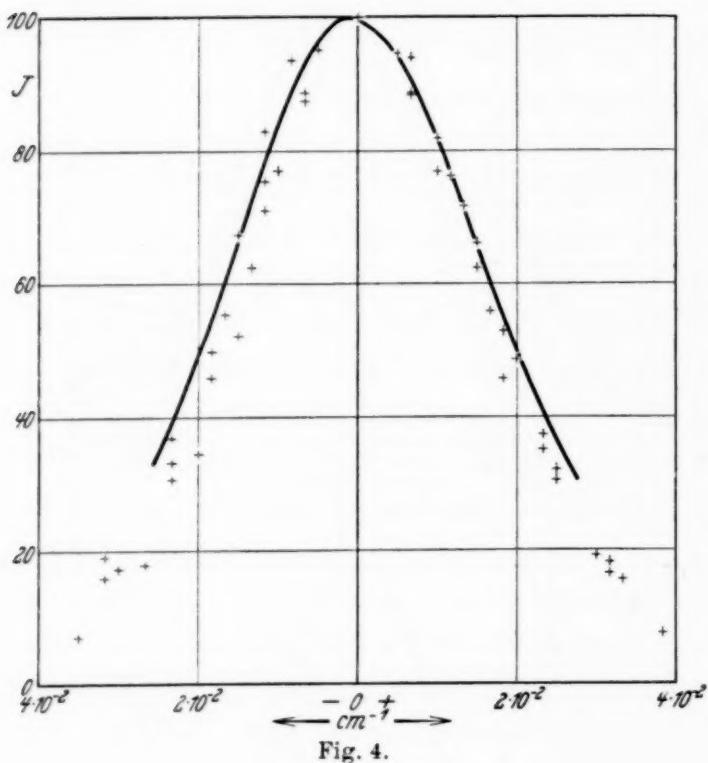


Fig. 3.

Danach erscheint der Schluß berechtigt, daß die Intensitätsverteilung einer im Molekularstrahl erzeugten Linie mit der berechneten Verteilung übereinstimmt, und daß in der Tat die Verteilung Nr. 1 von der wahren, vom Doppler-Effekt befreiten Verteilung der Linie nur noch wenig abweicht. Auf Grund der bei den graphischen Integrationen gewonnenen Erfahrungen wird geschätzt, daß die wahre Verteilung durch völlige Befreiung vom Einfluß der Apparateverteilung und des Doppler-Effektes höchstens noch

um 10% schmäler werden würde.

Vor einer Diskussion des möglichen Zusammenhangs zwischen der gefundenen Verteilung und einer Hyperfeinstruktur soll noch gezeigt werden, daß einige zunächst noch nicht erwähnte Fehlerquellen keinen Einfluß auf die gefundenen Verteilungen haben. Es wäre prinzipiell möglich, daß eine Impulsübertragung vom anregenden Elektron auf das angeregte Atom eine merkliche Verbreite-



rung der Linie hervorruft. Bei der Anregung durch Elektronen mit einer Voltgeschwindigkeit, die groß gegenüber der Anregungsspannung der Linie ist, kann maximal — nämlich bei Streuung des anregenden Elektrons um  $90^\circ$  — die für die Verbreiterung maßgebende zusätzliche Impulskomponente des angeregten Atoms in der Beobachtungsrichtung nahezu gleich dem Gesamtimpuls des Elektrons werden. Die dabei erzeugte Geschwindigkeit des angeregten Atoms würde bei den hier benutzten Elektronengeschwindigkeiten um 200 Volt Verbreiterungen um  $7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  ergeben. Derartige Streuprozesse sind aber außerordentlich selten<sup>1)</sup>. Es ist also zu erwarten, daß die durch Impulsübertragung auftretende Verbreiterung in Wirklichkeit wesentlich kleiner wird. Zur Prüfung, ob dieser Effekt eine merkliche Rolle spielt, wurden die Aufnahmen 3 und 4 mit stark

<sup>1)</sup> N. F. Mott u. H. S. W. Massey, Theory of Atomic Collisions, Oxford 1933, S. 159ff.

verschiedenen Elektronengeschwindigkeiten bei im übrigen ungeänderten Versuchsbedingungen unmittelbar nacheinander ausgeführt. Die bei der größeren Geschwindigkeit gemessene Halbwelte  $1,94 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$  ist um nicht ganz 3 % größer als die mit der kleineren Geschwindigkeit gemessene Halbwelte  $1,89 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$ . Fig. 5, in der die gemessenen Intensitätsverteilungen eingezeichnet sind, zeigt in den Randteilen der Linie eine systematisch größere Breite für die mit größerer Elektronengeschwindigkeit angeregte Linie. Der Unterschied ist nicht groß genug, um ihn mit Sicherheit als Nachweis der Verbreiterung durch Impulsübertragung ansehen zu können, deren Auftreten sich an leichteren Atomen ohne Schwierigkeiten zeigen lassen wird. Mit Sicherheit kann jedoch gesagt werden, daß die an der roten Cd-Linie gemessenen Intensitätsverteilungen durch diesen Effekt nicht merklich gefälscht sind.

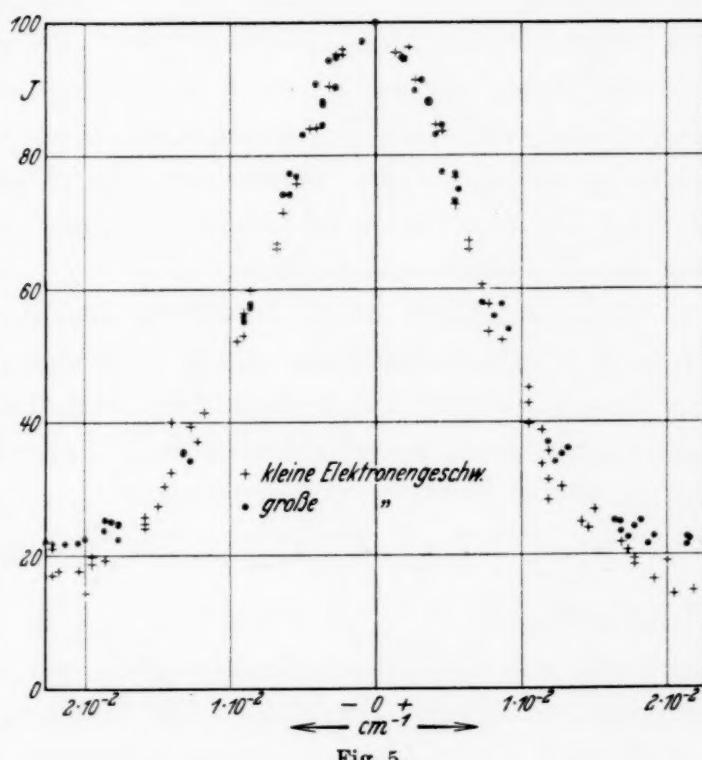


Fig. 5.

Daß die gemessenen Verteilungen merklich durch Selbstabsorption verbreitert sind, ist von vornherein wenig wahrscheinlich, da die Größe der Selbstabsorption der Anzahl der Atome im unteren Zustand der Linie proportional ist. Der untere Zustand der roten Cd-Linie  $6^1P_1 - 7^1D_2$  ist aber ein angeregter Zustand, in dem sich nur ein kleiner Bruchteil der im Molekularstrahl ohnehin kleinen Anzahl der Atome befindet. Mit stärker werdender Anregung muß die Anzahl der Atome im Zustand  $6^1P_1$  zunehmen. Wäre die Selbstabsorption merklich, so müßte sich deshalb ein Zusammenhang zwischen der beobachteten Halbwelte und der Intensität des Leuchtens ergeben. Die Intensitätsunterschiede, welche zwischen den Interferenzmaxima verschiedener Ordnung infolge der Ungleichmäßigkeit der Anregung an verschiedenen Stellen des Strahles auftreten (siehe oben S. 287) gestatten an jeder einzelnen Aufnahme das Fehlen eines solchen Zusammenhangs festzustellen. Das Fehlen eines Einflusses der Selbstabsorption

wird auch durch die Übereinstimmung der Halbwetten von Nr. 6 und 7 in Tabelle 2 gezeigt. Die Scheitelintensität war bei Nr. 7 zehnmal größer als bei Nr. 6 und sogar vierzigmal größer als bei Nr. 1.

Schließlich kann eine Verbreiterung dadurch hervorgerufen werden, daß die Beobachtungsrichtung nicht genau senkrecht zur Molekularstrahlrichtung steht. Eine solche Verbreiterung muß sogar immer auftreten, weil die Abbildung der Lichtquelle auf den Spalt des Spektralapparates die Benutzung eines Büschels von Beobachtungsrichtungen erfordert. Die Öffnung dieses Büschels betrug hier 1 : 23 und seine Achse wich von der zum Strahl senkrechten Richtung höchstens um  $2^\circ$  ab. Es läßt sich abschätzen<sup>1)</sup>, daß unter diesen Bedingungen noch nicht einmal die für eine monochromatische Linie berechneten Verteilungen merklich verändert werden. Die an der roten Cd-Linie gemessenen Verteilungen sind also sicher von diesen Fehlern unbeeinflußt.

Die beobachtete wahre Verteilung der Linie kann also nur durch Hyperfeinstrukturaufspaltung unter Mitwirkung der natürlichen Breite der Linie hervorgerufen werden. Der Wert der natürlichen Breite kann näherungsweise angegeben werden. Nach Weisskopf und Wigner<sup>2)</sup> wird die natürliche Breite  $\gamma$  in Kreisfrequenz

$$\gamma = \sum_i A_{6^1P_1 \rightarrow i} + \sum_k A_{7^1D_2 \rightarrow k}. \quad (4)$$

Dabei sind die  $A_{6^1P_1 \rightarrow i}$  und die  $A_{7^1D_2 \rightarrow k}$  die Übergangswahrscheinlichkeiten für alle vom unteren Zustand  $6^1P_1$  und vom oberen Zustand  $7^1D_2$  möglichen spontanen Übergänge. Die Summen sind über alle von dem betreffenden Zustand aus möglichen spontanen Übergänge zu erstrecken. Vom unteren Zustand  $6^1P_1$  ist nur der eine Übergang nach dem Normalzustand  $5^1S_0$  möglich. Die zugehörige Übergangswahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Messung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene von Kuhn<sup>3)</sup> zu  $5 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$ . Die Übergangswahrscheinlichkeiten für die vom oberen Zustand aus möglichen Übergänge sind nicht gemessen. Es ist zu erwarten, daß diese einen Beitrag der Größenordnung  $5 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}$  zu  $\gamma$  liefern.  $\gamma$  wird also mit einer Unsicherheit von etwa  $\pm 10\%$  gleich  $5,5 \cdot 10^8 \text{ sec}^{-1}$  in Kreisfrequenz oder in Wellenzahlen gleich  $2,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ . Dieser große Wert der natürlichen Breite ist für eine einfache Linie neben der Doppler-Breite und der Apparatebreite nicht mehr vernachlässigbar, die unter den Bedingungen auftreten, welche bei der Messung der wahren Intensitätsverteilung vorliegen. Durch Überlagern der natürlichen Breite

<sup>1)</sup> Siehe I. — <sup>2)</sup> V. Weisskopf u. E. Wigner, ZS. f. Phys. **63**, 54, 1930.  
— <sup>3)</sup> W. Kuhn, Kgl. Danske Vidensk. Selskab. Math.-fys. Medd. **7**, Nr. 12, 1926.

über die durch Überlagern von Doppler- und Apparatebreite erhaltene Verteilung ergibt sich für eine einfache Linie eine Verteilung mit der Halbwelte  $7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ , die in Fig. 2 gestrichelt eingezeichnet ist und immer noch wesentlich schmäler ist, als die beobachtete wahre Verteilung.

Es muß also eine Aufspaltung die Intensitätsverteilung in der Linie merklich beeinflussen. In der Tat zeigt die Linie eine merkliche Unsymmetrie und in der Nähe ihrer Maximalintensität deutliche Anzeichen einer beginnenden Aufspaltung in Komponenten. Diese ist in Fig. 2 zu erkennen. Fig. 6 zeigt die zugehörigen Photometerkurven. Übereinander sind die ersten drei Ordnungen von gegenüberliegenden Seiten der Interferenzringe wiedergegeben. Die beiden Registrierungen des ersten Ringes zeigen übereinstimmend an den durch Pfeile markierten Stellen Andeutungen von Aufspaltungen. Die weiteren Ringe, bei denen sich die endliche Breite des Photometerspaltes bereits bemerkbar macht, lassen, wie danach zu erwarten, die Aufspaltung nicht mehr deutlich erkennen. Eine wesentlich bessere Auflösung der Linie dürfte sich nicht mehr erreichen lassen, weil die natürliche Breite schon einen wesentlichen Teil der Breite einer einfachen Linie bedingt. Eine kleine Verbesserung durch weiteres Herabdrücken der Doppler- und der Apparatebreite würde sich wegen der gleichzeitig eintretenden Verminderung der Intensität nur mit einem wesentlich lichtstärkeren Interferenzspektrographen bei erträglichen Belichtungszeiten erreichen lassen.

Eine genaue Feinstrukturanalyse der roten Cd-Linie liegt offenbar außerhalb des Bereichs des Möglichen. Die in Fig. 2 und 6 erkennbaren Andeutungen von Aufspaltungen lassen auf Komponentenabstände der Größenordnung  $3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  schließen. Es läßt sich wahrscheinlich machen, daß für das Zustandekommen der beobachteten Verteilung die Isotopen-

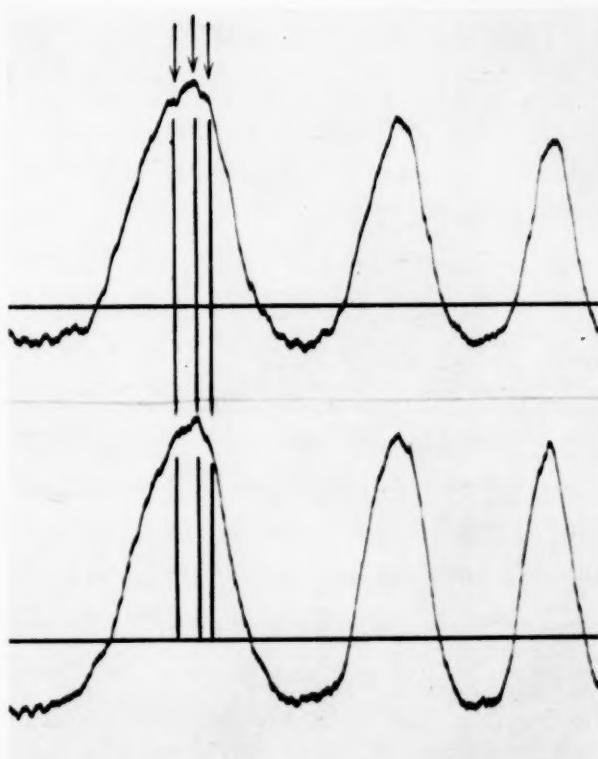


Fig. 6.

verschiebung wesentlich ist. Cd besteht<sup>1)</sup> zu 78 % aus den geraden Isotopen 110, 112, 114 und 116 und zu 22 % aus den ungeraden Isotopen 111 und 113. Nach der Analyse der Hyperfeinstruktur anderer Linien des Cd<sup>2)</sup> ist der Kernspin der geraden Isotope Null und der der ungeraden Isotope  $\frac{1}{2} h/2\pi$ . Nur die ungeraden Komponenten spalten also auf. Würden die Linien der geraden Isotope keine Verschiebung zeigen, so müßte die in Fig. 2 eingezeichnete gestrichelte Verteilung 78 % der Gesamtintensität der Linie umschließen. In Wirklichkeit ist die umschlossene Fläche höchstens 50 %. Nimmt man an, daß infolge der Isotopenverschiebung die vier geraden Isotope äquidistante Linien ergeben, so erhält man unter Benutzung der von Aston angegebenen Relativintensitäten der Isotope eine umschlossene Fläche von 78 % nur, wenn der Abstand zweier benachbarter gerader Komponenten größer als  $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  ist. Andererseits müssen sich wesentlich deutlichere Aufspaltungen als die beobachteten ergeben, wenn dieser Abstand größer wäre als  $7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$ ; das ist die Halbwelt der in Fig. 2 gestrichelt eingezeichneten Verteilung für eine einfache Linie. Danach ergibt sich die Aussage, daß als Folge der Isotopenverschiebung der Abstand der Linien zweier benachbarter gerader Isotope zwischen 3,5 und  $7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  liegt. Die Verteilungen, welche man erhält, wenn man für die geraden Isotope entsprechende Komponenten in diesem Abstandsbereich annimmt, zeigen auch in ihrem Intensitätsmaximum einen ähnlichen Verlauf wie die beobachtete Verteilung. Über die ungeraden Isotopen sind keine Aussagen auf Grund der hier mitgeteilten Messungen möglich. Die von Heydenberg<sup>3)</sup> aus der magnetischen Drehung der Polarisationsebene der Resonanzfluoreszenz der Linie  $5^1S_0 - 6^1P_1$  hergeleitete Aussage, daß die ungeraden Isotope zwei aus der Aufspaltung des  $6^1P_1$ -Terms hervorgehende Komponenten im Abstand von  $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  voneinander ergeben, ist mit der hier gemessenen Verteilung der Linie vereinbar. Daran dürfte sich auch dann nichts ändern, wenn die hier nachgewiesene Isotopenverschiebung berücksichtigt wird.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut.

---

<sup>1)</sup> F. E. Aston, Mass-Spectra and Isotopes, S. 120. London 1933. —

<sup>2)</sup> H. Schüler u. H. Brück, ZS. f. Phys. **56**, 291, 1929; H. Schüler u. I. E. Keyston, ebenda **67**, 433, 1931. — <sup>3)</sup> N. P. Heydenberg, Phys. Rev. **43**, 640, 1933.

## Wahre und scheinbare Breite von Spektrallinien.

Von **R. Minkowski** und **H. Bruck** in Hamburg.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. April 1935.)

Es wird der Zusammenhang zwischen wahrer und beobachteter Intensitätsverteilung einer Spektrallinie bei Beobachtung mit dem Fabry-Perot-Interferometer angegeben.

Die mit einem Spektralapparat beobachtete Intensitätsverteilung einer Linie entsteht durch Überlagerung der wahren Verteilung der Linie und der Apparateverteilung, welche der Spektralapparat für eine streng monochromatische Linie ergibt. Den Zusammenhang zwischen der beobachteten Halbwelte, der wahren Halbwelte und der Halbwelte der Apparateverteilung haben Burger und van Cittert<sup>1)</sup> für den Fall berechnet, daß die wahre Verteilung der Linie die durch die thermische Bewegung der Moleküle erzeugte Doppler-Verteilung und der benutzte Spektralapparat ein Fabry-Perot-Interferometer ist. Bei der Benutzung des Ergebnisses hat sich gezeigt, daß, offenbar infolge der Ungenauigkeit der benutzten graphischen Integration, die dort angegebene Beziehung zwischen beobachteter, wahrer und Apparatehalbwelte für große Werte des Verhältnisses von wahrer zu Apparatehalbwelte einen merklichen Fehler erhalten hat. Der Fehler soll hier berichtigt werden.

Solange die beobachtete Verteilung weniger als ein Drittel des Dispersionsgebietes einnimmt, wird die Intensitätsverteilung, welche durch Überlagerung einer Doppler-Verteilung mit der ganzen Halbwelte

$$w = 2 \sqrt{\ln 2} \cdot q$$

und einer Fabry-Perot-Verteilung mit der Halbwelte  $a$  entsteht, mit genügender Annäherung wiedergegeben durch

$$J(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{q^2}} \frac{dx}{1 + \frac{4(\mu + x)^2}{a^2}}, \quad (1)$$

<sup>1)</sup> H. C. Burger u. P. H. van Cittert, ZS. f. Phys. **44**, 58, 1927.

wenn  $\mu = v_0 - \nu$  der Abstand von der Linienmitte  $v_0$  ist. Ist  $\Theta\nu$  die Größe des Dispersionsgebietes und  $\tau$  das Reflexionsvermögen der Verspiegelung, so ist

$$a = \frac{\Theta\nu}{2\pi} \frac{(1-\tau)}{\sqrt{\tau}}.$$

Durch eine einfache Transformation geht (1) über in

$$J(\nu) = q\sqrt{\pi} \cdot \psi\left(\frac{\mu}{a}, \frac{q}{a}\right). \quad (1a)$$

Dabei ist  $\psi(x, \eta)$  eine Funktion, für die Tabellen und Reihenentwicklungen von Born<sup>1)</sup> angegeben worden sind. Für den Zusammenhang zwischen der beobachteten Halbwelte  $g$  der Verteilung (1a), der wahren Halbwelte  $w$  und der Apparatehalbwelte  $a$  gilt in dem Gebiet, in dem  $w \ll a$  ist, unverändert die von Burger und van Cittert abgeleitete Beziehung

$$g^2 = a^2 + 2,15 w^2. \quad (2)$$

Sobald nicht mehr  $w \ll a$  ist, lässt sich keine allgemein gültige einfache Beziehung zwischen  $g$ ,  $a$  und  $w$  angeben. Die von Burger und van Cittert angegebene Beziehung

$$g = 0,80 a + 0,81 w \quad (3)$$

gilt nur in dem Bereich  $0,5 < w/a < 1$ . Ebenso gilt im Bereich  $1 < w/a < 3$

$$g = 0,64 a + 0,98 w. \quad (4)$$

In Fig. 1 ist  $w/g$  als Funktion von  $a/g$  eingetragen. Mit Hilfe dieser Figur kann die wahre Breite aus der gemessenen und der Apparatebreite bestimmt werden.

Ein anderer Fall, in dem sich ein einfacher Zusammenhang zwischen  $g$ ,  $a$  und  $w$  ergibt, ist der, in dem die Linie nicht Doppler-Verteilung, sondern die aus der Dispersionstheorie folgende Linienform

$$J(\nu) = \frac{1}{\frac{w^2}{4} + (\nu - v_0)^2}$$

hat. Dabei ist  $w$  jetzt die von der natürlichen Breite, der Lorentzschen Stoßdämpfung oder von beiden gleichzeitig herrührende wahre Halbwelte.

<sup>1)</sup> M. Born, Optik, S. 477 u. 483, Berlin 1933.

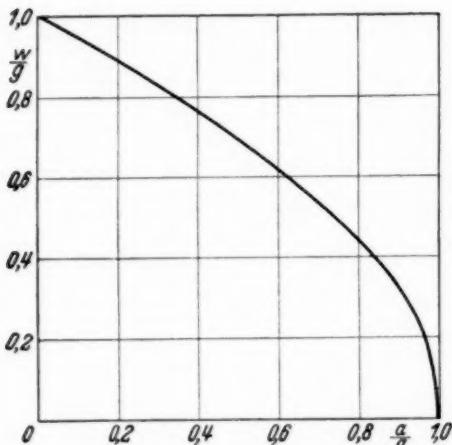


Fig. 1.

Die durch Überlagerung der Fabry-Perot-Verteilung erzeugte beobachtete Verteilung wird

$$\left. \begin{aligned} J(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(\frac{w^2}{4} + x^2\right) \left(\frac{a^2}{4} + (x + \mu)^2\right)}, \\ &= \frac{2\pi(a+w)}{aw} \frac{1}{\left[\mu^2 + \frac{(a+w)^2}{4}\right]}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

In diesem Falle gilt allgemein

$$g = a + w. \quad (6)$$

Auch wenn die Verteilung nicht ganz eine der vorausgesetzten Formen hat, kann der in Fig. 1 dargestellte Zusammenhang oder (6) für die Abschätzung der ungefähren Größe des Apparateeinflusses benutzt werden, wenn die Apparatehalbweite klein gegen die beobachtete Halbwelt ist.

## Die Kernprozesse in Lithium bei Beschießung mit $\alpha$ -Strahlen.

Von K. Schnetzler in Heidelberg.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 3. April 1935.)

Es werden die Anregungsfunktionen der von Polonium- $\alpha$ -Teilchen in Lithium ausgelösten Neutronen und  $\gamma$ -Strahlen aufgenommen. Nach Positronen oder Elektronen wird sowohl nach wie während der Bestrahlung vergeblich gesucht.

Die daraus zu ziehenden Folgerungen werden diskutiert.

**1. Problemstellung.** Die bei der Beschießung von Lithium mit Po- $\alpha$ -Strahlen auftretenden Prozesse sind bisher noch nicht im Zusammenhang untersucht worden, und die Einzelresultate sind zum Teil nur qualitativ. Das Auftreten von  $\gamma$ -Strahlen und Neutronen ist zwar sichergestellt und auch die  $\gamma$ -Ausbeute ist für volle  $\alpha$ -Reichweite bereits frühzeitig bestimmt worden<sup>1)</sup>, dagegen war die Anregungsfunktion bisher unbekannt und die Angaben über die Einsatzenergie der  $\alpha$ -Teilchen mehr qualitativer Art<sup>2)</sup>. Dasselbe gilt von den Angaben über eine mit der Neutronenemission verknüpfte radioaktive Positronenstrahlung<sup>3)</sup>, von deren Existenz es abhängt, ob die Neutronenaussendung dem Isotop 6 oder 7 zuzuschreiben ist. Die Kenntnis der Anregungsfunktionen und insbesondere ihres Einsatzes ist wichtig für die Frage nach der Entstehung der  $\gamma$ -Strahlung. Wenn diese wirklich bei kleinerer  $\alpha$ -Energie als alle anderen Prozesse beginnt, so kann sie nicht wie sonst dem Übergang zwischen zwei Zuständen eines entstehenden Kerns zugeschrieben werden, sondern muß durch Anregung des Lithiumkerns selbst ohne Einfangen des  $\alpha$ -Teilchens erklärt werden (Bothe und Becker, l. c.). Dies wäre jedoch der einzige bekannte Prozeß dieser Art. Da Protonen merklicher Energie nicht gefunden sind<sup>4)</sup>, so fragt es sich insbesondere, ob die Neutronenemission nicht doch, wenn auch mit geringer Intensität, der  $\gamma$ -Strahlung parallel geht. Wir haben zur Klärung dieser Punkte die von Po- $\alpha$ -Teilchen in Li ausgelösten Strahlen im Zusammenhang untersucht.

**2. Experimentelle Anordnung.** Das Li wurde auf das Innere einer Glaskugel von 4 cm Radius aufgedampft (Fig. 1), die vorher zum Schutze mit einem Kupferspiegel versehen worden war. Die Bestimmung der Schicht-

---

<sup>1)</sup> W. Bothe u. H. Becker, ZS. f. Phys. **66**, 289, 1930. — <sup>2)</sup> I. Curie u. F. Joliot, C.R. **196**, 397, 1933; P. Savel, ebenda **198**, 1404, 1934. — <sup>3)</sup> L. Meitner, Naturwissensch. **22**, 420, 1934. — <sup>4)</sup> Vgl. Handb. d. Phys. 2. Aufl., XXII/1, 166.

dieke geschah nachträglich durch Lösen des Lithiums in Wasser und Alkalimetrie. Es ergab sich  $50 \mu$ . Nun entspricht zwar der vollen  $\alpha$ -Reichweite des Poloniums eine Dicke von  $72 \mu$ , so daß in diesem Falle die letzten  $1,2\text{cm}$  Luftäquivalent der  $\alpha$ -Bahnen nicht mehr im Lithium verlaufen. Dies ist aber auf die Ergebnisse ohne Einfluß, da so langsame  $\alpha$ -Teilchen keine Kernstrahlung im Lithium mehr erregen. Da sich auf der oberen Halbkugel nur die Hälfte des verdampften Li vorfand, muß es sich nach allen Richtungen ziemlich gleichmäßig niedergeschlagen haben. Das Präparat, ein mit Polonium bedecktes kreisförmiges Silberblech von  $1\text{ cm}$  Durchmesser, befand sich im Mittelpunkt. Seine Stärke betrug anfangs  $20\text{ Millicurie}$ , die Oberflächenreinheit war geprüft. Die  $\alpha$ -Reichweite wurde durch Veränderung des Gasdruckes (gründlich getrocknete Kohlensäure) variiert. Von einer Veränderung der Lithiumschicht im Verlauf der Messungen war nichts zu merken, das Aussehen war auch nach drei Monaten unverändert gelblich-weiß.

Die Zählung der  $\gamma$ -Quanten und Neutronen erfolgte mit dem Zählrohr nach der von Bothe und Becker<sup>1)</sup> angegebenen Methode, die den einfachsten und direktesten Vergleich der beiden Strahlungen unter denselben Bedingungen liefert. Die Wandstärke der Rohre betrug  $2\text{ mm}$  Zink, der Gasdruck  $1/10\text{ Atm}$ . Das Neutronenzählrohr von  $5 \times 12\text{ cm}^2$  Querschnitt war innen mit Paraffinpapier belegt, über welches Blattgold geklebt war. Es war zur Erhöhung der Ausbeute bei der geringen Energie der Neutronen mit Methan gefüllt und arbeitete im Proportionalbereich einwandfrei. Über einen Bereich von  $100\text{ Volt}$  war hier nur die Ausschlagsgröße, aber nicht die Zahl von der Spannung abhängig. Zur Zählung der  $\gamma$ -Quanten erwies es sich wegen der hohen Intensität als zweckmäßig, ein kleineres Zählrohr von  $2,5 \times 6\text{ cm}^2$  Querschnitt zu benutzen. Es besaß Luftpfüllung und einen oxydierten Zähldraht. Die Zählrohre wurden mit  $5\text{ cm}$  Blei

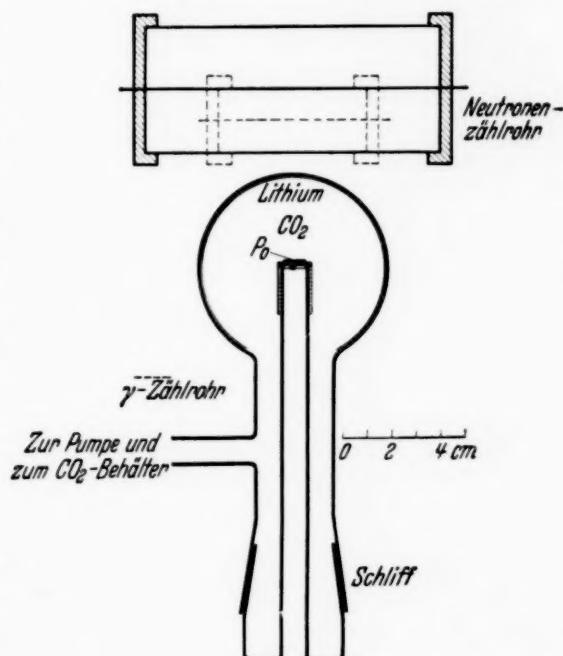


Fig. 1. Anordnung zur Aufnahme der Anregungsfunktionen.

<sup>1)</sup> W. Bothe u. H. Becker, Naturwissensch. **20**, 757, 1932.

gepanzert. Die Spannungen von 2700 Volt für das Neutronen- und 2200 Volt für das  $\gamma$ -Zählrohr wurden von einem Transformator mit Stabilisatoranlage nach Medicus<sup>1)</sup> geliefert. Die  $\gamma$ -Impulse wurden über einen Dreiröhren-Widerstandsverstärker einem mechanischen Zählwerk zugeführt, die Protonenimpulse nur einfach mit einer RES 094 etwa auf das 100fache verstärkt, über ein Gleichrichterrohr einem Einfadenelektrometer zugeleitet und die Ausschläge des Fadens gefilmt. Die Schaltung ist ähnlich der von Klarmann<sup>2)</sup> verwendeten. Man hat so die Möglichkeit, auch die Größe der Ausschläge zu berücksichtigen.

3. Anregungsfunktion der  $\gamma$ -Strahlung. Fig. 2 gibt die Ausbeute an  $\gamma$ -Quanten als Funktion der  $\alpha$ -Reichweite wieder. Zu jedem Punkt ist

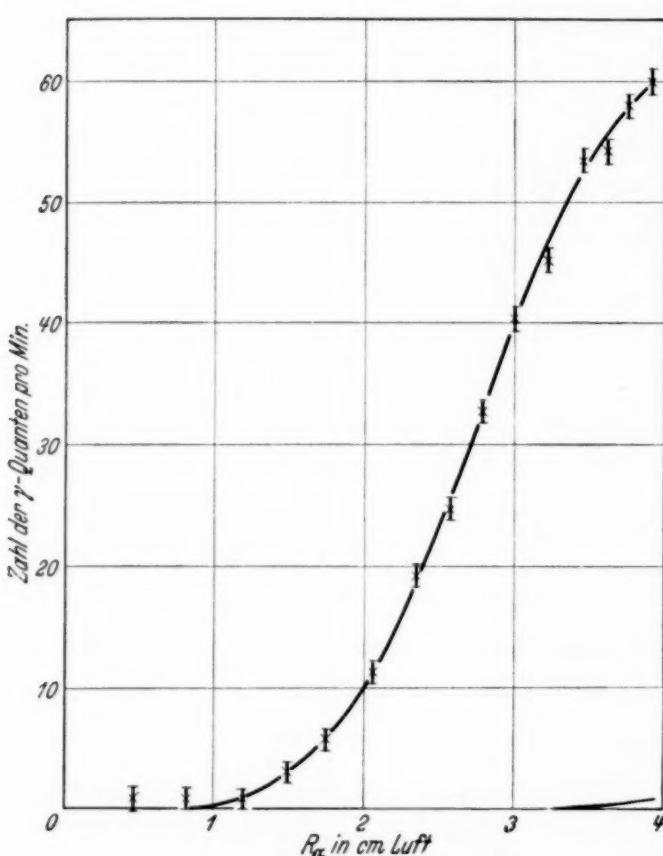


Fig. 2. Anregungsfunktion der  $\gamma$ -Quanten.

weite von 1,3 cm, d. h. bei einer  $\alpha$ -Energie von  $2,3 \cdot 10^6$  e-Volt liegen. Da die Höhe des Potentialberges gegen  $\alpha$ -Teilchen bei Lithium zwischen  $2^{1/2}$  und  $3 \cdot 10^6$  e-Volt liegen dürfte, scheint die  $\gamma$ -Emission einzusetzen, sobald das  $\alpha$ -Teilchen die Schwelle mit einiger Wahrscheinlichkeit durchdringen und in den Kern gelangen kann.

<sup>1)</sup> G. Medicus, ZS. f. techn. Phys. **14**, 304, 1933. — <sup>2)</sup> H. Klarmann, ZS. f. Phys. **87**, 411, 1934.

der doppelte mittlere Fehler als senkrechter Strich aufgetragen. Als Bremsvermögen von  $\text{CO}_2$  relativ zu Luft ist 1,53 angenommen worden. Für das Auflösungsvermögen der Zählanordnung ist bereits korrigiert. Die endliche Ausdehnung des Präparates und eine geringe Exzentrizität der Mittelpunkte von Präparat und Kugel (2 mm) machen sich bei höheren  $\text{CO}_2$ -Drucken etwas bemerkbar und täuschen einen zu frühen Einsatz der Anregungskurve vor. Der wahre Einsatzpunkt dürfte bei einer Reich-

Die Strahlung wird nach unseren Beobachtungen durch 4 mm Pb auf  $50 \pm 4\%$  heruntergesetzt. Dies gibt einen Absorptionskoeffizienten von  $1,73 \pm 0,19$ , entsprechend einer Quantenenergie von  $0,5 \cdot 10^6$  e-Volt, wie auch früher beobachtet (P. Savel, l. c.).

Wir haben noch untersucht, ob die  $\gamma$ -Strahlung radioaktiven Charakter hat, haben aber sowohl in der ersten Minute nach Abbremsung der  $\alpha$ -Strahlen wie in allen folgenden nur den gewöhnlichen Nulleffekt beobachten können. Wenn also überhaupt eine radioaktive  $\gamma$ -Strahlung vorliegt, so ist die Halbwertszeit auf alle Fälle so kurz, daß die Messungen hierdurch nicht gefälscht sein können. Es liegt aber (vgl. Ziffer 5) überhaupt kein Anlaß vor, an dem momentanen Charakter der  $\gamma$ -Strahlung zu zweifeln.

**4. Anregungsfunktion der Neutronen.** In Fig. 3 ist die Anzahl der pro Minute beobachteten Neutronen als Funktion der  $\alpha$ -Reichweite aufgetragen, ebenso in Fig. 2 im Maßstab der  $\gamma$ -Anregungskurve. Die Messung dauerte drei Wochen, der Nulleffekt betrug 1 Ausschlag in 10 Minuten. Auch uns ist es nicht gelungen,

unterhalb 3,3 cm Reichweite ( $4,7 \cdot 10^6$  e-Volt) noch Neutronen zu finden. Die endliche Ausdehnung des Präparates ist hier praktisch ohne Einfluß. Dagegen fragt es sich, wie weit die Anregungsfunktion der Neutronen mit der der eigentlich beobachteten Sekundärprotonen parallel geht und insbesondere, ob möglicherweise

die Neutronen schon unterhalb von 4,7 Millionen Volt auftreten können, ohne vom Paraffinzählrohr angezeigt zu werden. Hier ist zum Unterschied von den  $\gamma$ -Quanten die Zunahme der Energie der Neutronen mit der der  $\alpha$ -Strahlen zu berücksichtigen. Diese Abhängigkeit ist wohlbekannt<sup>1)</sup>.

Die Ausbeute an Sekundärprotonen aus der Paraffinwand des Zählers könnte infolgedessen für schnelle Neutronen wesentlich höher als für langsame sein, da die Protonen aus größerer Tiefe kommen können. Eine Be-

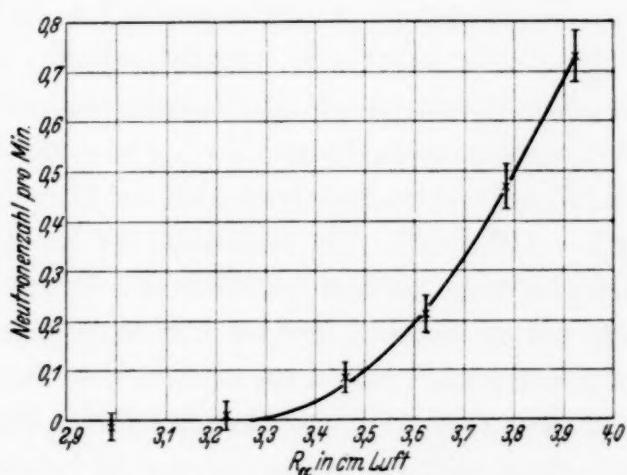


Fig. 3. Anregungsfunktion der Neutronen.

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. W. Bothe, ZS. f. Phys. **51**, 613, 1928.

rechnung dieses Einflusses hat aber wenig Zweck, da doch die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts der Protonenauslösung von der Neutronenenergie unbekannt bleibt. Statt dessen haben wir das Zählrohr mit Bor-neutronen von einigermaßen bekannter Energie roh geeicht. Benutzt wurden Rückwärtsneutronen aus einer dicken Borschicht bei einer Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen von 3,4 cm Luft, sowie nach Einschieben einer Nickelfolie von  $R_\alpha = 1,8$  cm Luft. Die Anordnung ist aus Fig. 4 zu ersehen. (Das  $\text{Li}_2\text{CO}_3$  ist wegzudenken.) Wegen des aus Intensitätsgründen notwendigen großen Raumwinkels kommen auch Neutronen zur Wirkung, die nicht genau nach rückwärts emittiert werden, sondern bis nahe an einen Emissionswinkel von  $90^\circ$ . Die Vorwärts-neutronen aus Bor haben nach Bonner<sup>1)</sup> bei  $R_\alpha = 3,9$  cm eine Maximalenergie von  $4,2 \cdot 10^6$  e-Volt. Dies gibt für unsere schnellsten Neutronen bei  $R_\alpha = 1,8$  cm und Seitwärts-emission  $1,4 \cdot 10^6$  e-Volt, wobei es wenig ausmacht, ob  $B_{10}$  oder  $B_{11}$  zertrümmert wird.

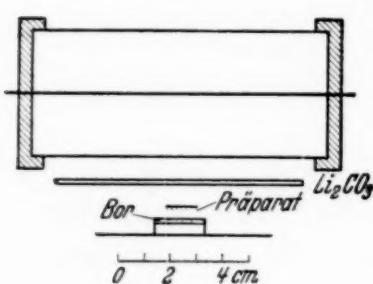


Fig. 4. Messung mit Bor-Neutronen.

Da aber Geometrie und Energieverteilung die langsameren Neutronen stark bevorzugen, haben fast alle eine Energie unter  $1 \cdot 10^6$  e-Volt. Bei  $R_\alpha = 3,4$  cm berechnet sich die obere Energiegrenze der Neutronen zu  $2,5 \cdot 10^6$  e-Volt. Als Verhältnis der Neutronenausschläge für die beiden  $\alpha$ -Reichweiten wurde 1 : 4 gefunden. Dieses Verhältnis ist nun auch nach dem gut gesicherten Verlauf der Anregungskurve der Borneutronen, wie sie Chadwick<sup>2)</sup> mit Ionisationskammer und Oszillograph aufgenommen hat, zu erwarten, so daß der Abfall der Empfindlichkeit des Neutronenzählrohres mit der Neutronenenergie jedenfalls nicht wesentlich stärker als bei Chadwick sein kann.

Eine zweite Möglichkeit für ein verspätetes Einsetzen der Neutronenanregungskurve wäre durch extrem hohe Absorption der langsameren Neutronen in der Zwischensubstanz gegeben. In der Tat haben Fermi<sup>3)</sup> sowie Chadwick und Goldhaber<sup>4)</sup> für die langsamen aus Paraffin heraus-diffundierenden Neutronen einen Wirkungsquerschnitt des Li der Größenordnung  $10^{-21} \text{ cm}^2$  gefunden. Ein Wirkungsquerschnitt von  $3 \cdot 10^{-21} \text{ cm}^2$  würde nun tatsächlich zur Absorption der Hälfte der Neutronen in einer

<sup>1)</sup> T. W. Bonner u. L. M. Mott-Smith, Phys. Rev. **46**, 258, 1934. — <sup>2)</sup> J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. (A) **142**, 1, 1933. — <sup>3)</sup> E. Fermi u. Mitarbeiter, La Rie. Se. **5** (2), Nr. 9/10, 1934. — <sup>4)</sup> J. Chadwick u. M. Goldhaber, Nature **135**, 65, 1935.

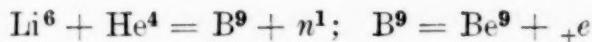
50  $\mu$  dicken Li-Schicht führen. Um sicher zu gehen, haben wir die Absorption der schon erwähnten Borneutronen von maximal  $1,4 \cdot 10^6$  e-Volt in  $0,25 \text{ g/cm}^2 \text{ Li}_2\text{CO}_3$  bestimmt (Fig. 4). Die nicht sehr lang ausgedehnte Zählung ergab eine Absorption von  $1 \pm 8\%$ , also einen Wirkungsquerschnitt von weniger als  $2 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2$ . Der Wirkungsquerschnitt von Li gegen die schnellen Neutronen aus Ra Em + Be beträgt nach Dunning<sup>1)</sup>  $1,6 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  und ähnliche Werte gelten für die anderen Leichtelemente. Kürzlich ist auch der Wirkungsquerschnitt von Li gegen die in Paraffin verlangsamten Neutronen zu  $5 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^2$  bestimmt worden<sup>2)</sup>. Eine merkliche Absorption kommt also nicht in Frage.

Alle diese Ergebnisse führen zu dem Schluß, daß die Neutronen wirklich erst bei  $E_\alpha = 4,7 \cdot 10^6$  e-Volt oder kurz vorher einsetzen und jedenfalls von einem Parallelgehen von Neutronen und  $\gamma$ -Emission keine Rede sein kann. Begänne die Neutronenemission nämlich tatsächlich schon bei  $2,3 \cdot 10^6$  e-Volt, so wäre bei der beobachteten Einsatzenergie von  $E_\alpha = 4,7 \cdot 10^6$  e-Volt die Energie der Vorwärtsneutronen aus Li<sup>7</sup> (dem die Neutronen höchstwahrscheinlich zuzuschreiben sind, vgl. Ziff. 5) bereits mindestens  $E_n = 2,5 \cdot 10^6$  e-Volt. Bei der Berechnung ist dabei die Annahme gemacht, daß beim Einsatzpunkt die Energie der Neutronen im Schwerpunktssystem verschwindet, was offenbar einen Mindestwert für die Neutronenenergie ergibt. Nach dem Obigen ist aber für Neutronen zwischen 1 und  $2,5 \cdot 10^6$  e-Volt sowohl die Zählerempfindlichkeit als auch die Absorption in Li normal, so daß sie nicht der Beobachtung entgehen können. Außerdem wäre unter denselben Annahmen bei voller  $\alpha$ -Reichweite eine Neutronenenergie von  $3 \cdot 10^6$  e-Volt zu erwarten. Ein Intensitätsverhältnis von mindestens 1 : 10, wie es experimentell für die Neutronen bei  $R_\alpha = 3,8$  und  $3,9 \text{ cm}$  gefunden ist, ist bei der geringen Änderung der Energie von  $2,5 \cdot 10^6$  e-Volt auf  $3,0 \cdot 10^6$  e-Volt auf keinen Fall apparativ zu erklären und ist unverträglich mit dem Verhältnis 1 : 1,3, wie es bei Parallelgehen mit der  $\gamma$ -Strahlung zu erwarten wäre. Die Energie von  $3,0 \cdot 10^6$  e-Volt stünde auch in krassem Widerspruch zu der Energiebestimmung von Meitner mit der Wilson-Kammer<sup>3)</sup> ( $0,5 \cdot 10^6$  e-Volt) sowie von Savel aus der Absorption ( $0,9 \cdot 10^6$  e-Volt). Nimmt man jedoch an, daß bei  $E_\alpha = 4,7 \cdot 10^6$  e-Volt die Neutronen mit der Energie 0 im Schwerpunktssystem einsetzen, so errechnet man in der Tat für volle  $\alpha$ -Reichweite eine Neutronenenergie von  $1,0 \cdot 10^6$  e-Volt für die Vorwärtsneutronen. Die

<sup>1)</sup> J. R. Dunning, Phys. Rev. **45**, 586, 1934. — <sup>2)</sup> J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. **47**, 416, 1935. — <sup>3)</sup> L. Meitner, Congr. Solv. 1933.

erwähnte Annahme, daß die Neutronen beim Einsatz die Energie 0 haben, halten wir für berechtigt, da die Auslösung erst so hoch über der Potentialsschwelle erfolgt. Als Energietönung ergibt sich dann  $Q = -\frac{7}{11} \cdot 4,7 \cdot 10^6 \text{ e-Volt}$   
 $= -3,0 \cdot 10^6 \text{ e-Volt}$  für Li<sup>7</sup>. Negativer kann jedenfalls die Energietönung nicht sein. Ob sie direkt den Abstand von  $\alpha$ - und Neutronenniveau angibt oder ein Teil für  $\gamma$ -Strahlung verwendet wird, ist zur Zeit nicht zu entscheiden, das letztere ist aber unwahrscheinlich, da die differentielle  $\gamma$ -Ausbeute von  $4,7 \cdot 10^6 \text{ e-Volt}$  an nicht steigt, sondern eher sinkt (Fig. 2).

*5. Suche nach radioaktiver  $\beta$ -Strahlung.* Die nach der Beschießung auftretenden Positronen sollen nach Angabe von Meitner<sup>1)</sup> eine Maximalenergie von  $0,3 \cdot 10^6 \text{ e-Volt}$  und eine Halbwertzeit von einigen Minuten haben. Um ihre Anregungsfunktion aufzunehmen, wurde eine ähnliche Anordnung wie vorher benutzt, jedoch war das Gefäß durch eine Kupferfolie von 0,02 mm abgeschlossen, auf die innen das Lithium gedampft wurde. Durch einen seitlichen Schliff konnte das Präparat bedeckt werden. Nach der Bestrahlung wurde das Präparat abgeblendet und mit einem Zählrohr radioaktive Positronenstrahlung gesucht. Dieses trug zum Eintritt der  $\beta$ -Strahlen ein Aluminiumfenster von  $0,05 \times 16 \times 40 \text{ mm}^3$ . Das Zählwerk wurde alle halbe Minute abgelesen. Es gelang uns aber überhaupt nicht, eine radioaktive Strahlung zu finden, auch nicht bei Bestrahlung von Li<sub>2</sub>CO<sub>3</sub>, welches mit dem Polonium fast in Berührung gebracht und dann direkt unter das Zählrohr geschoben wurde, so daß die  $\beta$ -Strahlen nur das Zählrohrfenster zu durchsetzen hatten. Auch nach 14stündiger Bestrahlung fanden wir nichts. Um eine quantitative Grenze angeben zu können, haben wir Aluminium bestrahlt und gemessen. (Halbwertszeit 3,25 Minuten). Bei einem Nulleffekt von  $21 \pm 0,5$  pro halber Minute erhielten wir hier in der ersten halben Minute  $86 \pm 9$  Ausschläge bei vorheriger Sättigung, also einen Effekt von 65, während die Strahlung des Li<sub>2</sub>CO<sub>3</sub> in derselben Zeit höchstens 3 ausmachen konnte. Nach der von Meitner angegebenen Reaktionsgleichung

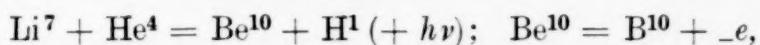


wären ebensoviele Neutronen wie Positronen zu erwarten. Die absolute Ausbeute an Neutronen bei Li soll nach Meitner und Philipp<sup>2)</sup> etwa  $4 \cdot 10^{-6}$  pro  $\alpha$ -Teilchen sein. Andererseits ist die Positronenausbeute bei Aluminium von Ellis und Henderson<sup>3)</sup> für  $R_\alpha = 3,9 \text{ cm}$  zu  $9 \cdot 10^{-9}$

<sup>1)</sup> L. Meitner, Naturwissensch. **22**, 420, 1934. — <sup>2)</sup> L. Meitner u. K. Philipp, Naturwissensch. **20**, 929, 1932. — <sup>3)</sup> C. D. Ellis u. W. I. Henderson, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 206, 1934.

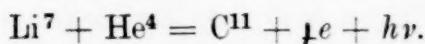
bestimmt worden. Ist die Halbwertszeit nicht extrem kurz, so hätten wir bei  $\text{Li}_2\text{CO}_3$  100mal soviel  $\beta$ -Teilchen beobachten müssen als bei Al, statt weniger als  $1/20$ . Die Neutronenausbeute müßte um den ganz unwahrscheinlichen Faktor 1000 überschätzt worden sein, um eine Halbwertszeit von einigen Minuten zu ermöglichen. Wir möchten aber das Auftreten von Positronen wenigstens von dieser Energie überhaupt nicht für wahrscheinlich halten, da auch während der Beschießung keine  $\beta$ -Strahlung zu entdecken ist (vgl. Ziff. 6). Die Neutronenemission ist daher mit größter Wahrscheinlichkeit dem  $\text{Li}^7$  zuzuordnen, entsprechend  $\text{Li}^7 + \text{He}^4 = \text{B}^{10} + n^1$ ).

**6. Momentane Aussendung von  $\beta$ -Strahlen. Deutung der  $\gamma$ -Emission.** Da die  $\gamma$ -Strahlung nach Ziffer 4 nicht mit der Neutronenemission zugleich erfolgt, käme als weiterer Prozeß eine Protonenemission in Frage, z. B. der von Meitner (l. c.) angenommene



aber auch hier würde wie oben der Einsatz der Protonenemission bei  $2,3 \cdot 10^6$  e-Volt zu einer Protonenenergie von  $3,0 \cdot 10^6$  e-Volt bei voller  $\alpha$ -Reichweite führen, und diese Protonen hätten der Beobachtung nicht entgehen können. Die  $\gamma$ -Strahlung kann also auch nicht von einer Protonenemission begleitet sein.

Schließlich wäre noch ein Einfangprozeß mit Aussendung eines Elektrons oder Positrons denkbar, etwa



Es schien deshalb interessant, zu prüfen, ob vielleicht  $\beta$ -Strahlung während der Beschießung entsteht.

Das Präparat (10 Millicurie) wurde zu diesem Zwecke mit dem Po nach unten direkt auf eine Platte aus geschmolzenem  $\text{Li}_2\text{CO}_3$  gelegt in einem Abstand von 4,5 cm vom  $\beta$ -Zählrohr. Die Elektronen haben dann insgesamt 19 cm Luftäquivalent zu durchsetzen. Es wurden 168  $\beta$ -Ausschläge pro Minute gezählt. Wurde zwischen Po und  $\text{Li}_2\text{CO}_3$  ein Stück Papier zur Absorption der  $\alpha$ -Strahlen geschoben, so ergab sich kein meß-

<sup>1)</sup> Anmerkung bei der Korrektur. Seither ist auch die bei der Beschießung von Bor mit Neutronen auftretende  $\alpha$ -Strahlung in der Wilson-Kammer genauer untersucht worden (B. Kurtschatov, I. Kurtschatov u. G. Latychev, C. R. **200**, 1199, 1935). Es handelt sich hier wahrscheinlich um den Umkehrprozeß zu unserer Neutronenemission, entsprechend



Die beobachtete Energietönung von  $2,6 \cdot 10^6$  e-Volt dürfte mit unserem Wert von  $3,0 \cdot 10^6$  e-Volt innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmen. Dies wäre eine weitere Stütze der Zuordnung zu  $\text{Li}^7$ .

barer Unterschied ( $1,0 \pm 2,3$  pro Minute). Dies muß so gedeutet werden, daß die beobachteten Elektronen im wesentlichen von einer minimalen Verunreinigung des Präparates mit Ra E herrühren. Eigentlich hätte man trotzdem eine geringe Abnahme beim Einschieben des Papiers finden sollen, da jedenfalls die  $\gamma$ -Strahlung des Li dadurch unterbunden wurde; diese wurde nach Einschalten von 2 mm Blei gesondert bestimmt zu  $6,8 \pm 2,2$  Ausschlägen pro Minute. Daß selbst diese Differenz nicht auftrat, kann dadurch erklärt werden, daß die Rückstreuung der Ra E-Elektronen vom Papier etwas stärker ist als die von  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ . Diese Erhöhung der Rückstreuung ist aber sicher geringer als 10% der gesamten gezählten Elektronen, denn selbst Kupfer als Unterlage ergab nur eine Erhöhung der Ausschlagszahl von 20% gegenüber  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ . Daher bleiben für eine  $\beta$ -Strahlung des Li bestenfalls 10 pro Minute übrig. Zum Vergleich wurde wieder die radioaktive Aluminium-Positronen-Strahlung benutzt, wir fanden für Sättigung 28 Positronen pro Minute. Obwohl die Ausbeute an Aluminium-positronen nach Ellis und Henderson 100mal kleiner ist als die für die  $\gamma$ -Strahlen aus  $\text{Li}_2\text{CO}_3$ , findet man dennoch mindestens dreimal soviel  $\beta$ -Strahlen. Somit ist jedenfalls die  $\gamma$ -Emission zu weniger als 1% von Elektronen begleitet. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt man auch durch Vergleich des  $\beta$ -Effektes mit der Anzahl der Li- $\gamma$ -Quanten, wenn man beachtet, daß die Empfindlichkeit des Zählrohres für  $\beta$ -Strahlen über 100mal größer ist als für  $\gamma$ -Strahlen. Auch durch Absorption der  $\beta$ -Strahlung vor Eintritt in den Zähler läßt sich der negative Ausfall des Versuches nicht erklären, denn bei einem Prozeß der angenommenen Art müßten bei voller  $\alpha$ -Reichweite die Elektronen eine Energie von mindestens  $1,9 \cdot 10^6$  e-Volt haben, wenn sie gleichzeitig mit den  $\gamma$ -Strahlen einsetzen sollen.

Reine Einfangprozesse schließlich sind bei so schnellen  $\alpha$ -Strahlen theoretisch äußerst unwahrscheinlich.

Als einzige mit allen experimentellen Tatsachen übereinstimmende Erklärung der  $\gamma$ -Strahlung bleibt nur die Anregung des Li-Kerns ohne Einfangen des  $\alpha$ -Teilchens übrig. Die Wahrscheinlichkeit dieses Vorgangs ist von Beck<sup>1)</sup> berechnet worden und gibt in Übereinstimmung mit der Beobachtung Werte der üblichen Größenordnung nur, wenn das  $\alpha$ -Teilchen leicht in den Kern eindringen kann. Ob das bei  $4,3 \cdot 10^6$  e-Volt angedeutete Maximum der differentiellen Anregungskurve das bei jeder Anregung zu erwartende Maximum darstellt, oder mit der Konkurrenz der hier ein-

---

<sup>1)</sup> G. Beck, Handb. d. Rad., 2. Aufl., **5**, 1.

setzenden Neutronenemission in Zusammenhang steht, oder schließlich als Resonanz mit einem virtuellen Quantenzustand des Li-Kerns zu deuten ist, möchten wir dahingestellt sein lassen.

**7. Zusammenfassung.** Die bei Li unter der Einwirkung von Po- $\alpha$ -Strahlen auftretenden Kernprozesse wurden im Zusammenhang untersucht.  $\gamma$ - und Neutronenanregungsfunktion wurden aufgenommen. Die erstere setzt bei  $2,3 \cdot 10^6$  e-Volt (1,3 cm RW), die zweite bei  $4,7 \cdot 10^6$  e-Volt (3,3 cm RW) ein. Es wurde gezeigt, daß der späte Einsatz der Neutronenemission nicht durch Störeinflüsse vorgetäuscht ist, und daß daher  $\gamma$ -Quanten und Neutronen sicher verschiedenen Einzelprozessen entstammen. Negative oder positive Elektronen konnten weder nach noch während der Bestrahlung gefunden werden. Die Neutronenemission wurde deshalb dem Li<sup>7</sup> zugeordnet, die zugehörige Energietönung beträgt  $-3,0 \cdot 10^6$  e-Volt. Die  $\gamma$ -Strahlung von etwa  $0,5 \cdot 10^6$  e-Volt wird durch Anregung des Li-Kerns ohne Einfang des  $\alpha$ -Teilchens erklärt.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft und die Helmholtz-Gesellschaft haben Herrn Prof. Bothe Mittel für diese Untersuchung zur Verfügung gestellt. Mein herzlichster Dank gilt Herrn Prof. Bothe für die Aufnahme in sein Institut, die Anregung und vielfache Ratschläge bei der Arbeit und die Überlassung des Poloniums. Herrn Dr. Klarmann danke ich für die Hilfe bei der Reinigung des Präparats, endlich der Agfa für die Überlassung der Filme.

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, März 1935.

## Gibt es ein Neutron der Masse 2?

Von S. Flügge in Frankfurt a. M.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 16. April 1935.)

Die Frage nach der möglichen Existenz eines Neutrons der Masse 2 ist bisher noch kaum eingehender diskutiert worden. Im folgenden werden eine größere Zahl von Indizien zusammengestellt, die dafür zu sprechen scheinen, daß ein Konglomerat von zwei Neutronen mit antiparallel gerichteten Spinen im Kernaufbau eine wesentliche Rolle spielt.

*Einleitung.* Die Frage, ob das Element der Ordnungszahl  $Z = 0$  nur ein Isotop, das Neutron ( $N_n$ ) besitzt, oder ob noch ein zweites Isotop der Masse 2 existiert, das wir im folgenden kurz *Bineutron* nennen wollen, ist bisher in der Literatur wohl gelegentlich einmal angeschnitten worden, aber noch nirgends eingehender in Angriff genommen. Die folgenden Ausführungen sollen zeigen, daß in der Tat eine große Zahl von Indizien dafür besteht, daß ein solches Gebilde beim Aufbau der Atomkerne eine wesentliche Rolle spielt.

Zunächst sei ein Wort darüber gesagt, wie wir uns ein solches Bineutron vorzustellen hätten. Als Kräfte, die zwei Neutronen zusammenhalten, kommen vielleicht Austauschkräfte in Frage, wenn man das Neutron als zerlegbar ansieht. Dann würde das Bineutron eine Art verkleinerten Abbildes eines neutralen Wasserstoffmoleküls darstellen. Es ist sehr zweifelhaft, ob eine solche Vorstellung berechtigt ist. Was wir dagegen ziemlich sicher wissen, ist, daß das Neutron den Spin  $1/2$  und ein magnetisches Moment besitzt. Es ist also durchaus denkbar, daß zwei Neutronen durch ihre magnetische Wechselwirkung zusammengehalten werden; als Modell würden wir also den wahrscheinlich recht stabilen Zustand mit antiparallelen Spinen anzusehen haben. Das Bineutron besitzt demnach, ebenso wie das  $\alpha$ -Teilchen, keinen Spin. Wir wollen nun die bekannten Atomkerne darauf untersuchen, ob Bineutronen eingebaut sind.

**1. Kernspin.** Die Atomkerne mögen nach Ordnungszahl  $Z$  und Massenzahl  $A$  in vier Klassen eingeteilt werden; wie in der nachstehenden Tabelle angedeutet. Die in den dahinterfolgenden Spalten genannten Zahlen geben an, wieviel verschiedene Kerne des betreffenden Typus mit dem darüber angeführten Spin  $i$  bekannt sind.

Klasse	$Z$	$A$	$i = 0$	$i = 1$	$i = 1/2$	$i = 3/2$	$i = 5/2$	$i = 7/2$	$i = 9/2$
<i>a</i>	gerade	gerade	21	—	—	—	—	—	—
<i>b</i>	ungerade	gerade	(1)	2	—	—	—	—	—
<i>c</i>	gerade	ungerade	—	—	7	3	2	1	—
<i>d</i>	ungerade	ungerade	(3)	—	6	14	9	8	2

Sehen wir von einigen wenigen Ausnahmen ab, über die wir weiter unten noch sprechen wollen (die eingeklammerten Zahlen), so ergibt sich das Schema: Klasse  $a$  hat  $i = i_a = 0$ , Klasse  $b$   $i_b = 1$ , ferner sind  $i_c$  und  $i_d$  halbzahlig, und die am häufigsten in diesen Klassen vertretenen Spinzahlen sind  $i_c = \frac{1}{2}$ ,  $i_d = \frac{3}{2}$ . Wir wollen versuchen, diesen Befund zu deuten. Wir fassen zunächst so viele Protonen und Neutronen wie möglich zu  $\alpha$ -Teilchen zusammen. Bei  $a$  und  $c$  bleibt dann kein Proton, und bei  $b$  und  $d$  ein Proton übrig. Dies eine Proton möge mit einem restlichen Neutron zu einem Deuton ( $i = 1$ ) verschmelzen. Fassen wir von den noch frei bleibenden Neutronen so viele wie möglich paarweise zu Bineutronen ( $i = 0$ ) zusammen, so bleibt schließlich höchstens ein einzelnes „freies“ Neutron übrig. Wir erhalten:

Klasse	Freie Neutronen	Freie Deutonen	$i$
$a$	—	—	0
$b$	—	1	1
$c$	1	—	$\frac{1}{2}$
$d$	1	1	$1 \pm \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ oder $\frac{1}{2}$

Dies stimmt bereits sehr weitgehend mit dem obigen Befund zusammen. Daß bei  $c$  und  $d$  auch Spine  $> \frac{1}{2}$  und  $> \frac{3}{2}$  auftreten, ist einfach so zu deuten, daß es öfters energetisch günstiger ist, zwei Neutronen mit parallelen Spinen einzubauen, anstatt ein Bineutron zu bilden. Wir dürfen nie vergessen, daß ein Atomkern ein sehr kompliziertes Gebilde ist, so daß solche Modellvorstellungen, wie wir sie notwendig entwickeln müssen, niemals die volle Wahrheit enthalten. Daß für wachsende  $i$  die Zahl der bekannten zugehörigen Kerne schnell abnimmt, deutet darauf hin, daß im allgemeinen durchaus die Tendenz zur Bineutronenbildung besteht. Wir haben bei unserem Modell den Kernspin berechnet ohne Berücksichtigung von Bahnimpulsen. Das ist jedenfalls statthaft, da  $\alpha$ -Teilchen, Deutonen und Bineutronen der Bose-Statistik gehorchen und sich im Grundzustand anhäufen können. Es bleibt höchstens ein freies Proton oder ein freies Neutron übrig, für das nichts hindert, ebenfalls einen  $s$ -Zustand anzunehmen.

Bei den oben eingeklammert angegebenen Zahlen handelt es sich um die Elemente  $\text{Li}_3^6$  ( $i_b = 0$ ) und  $\text{Al}_{13}^{27}$ ,  $\text{Ag}_{47}^{107}$ ,  $\text{Ag}_{47}^{109}$  ( $i_d = 0$ ). Eine triviale Lösung dieser Schwierigkeit scheint nicht ausgeschlossen: Der Befund  $i = 0$  bedeutet ja einfach, daß keine Hyperfeinstrukturaufspaltung gefunden worden ist; das kann aber leicht daran liegen, daß die magnetischen Momente sehr klein sind, so daß keine Aufspaltung zustande kommt, oder diese doch so klein ist, daß sie nicht mehr aufgelöst werden konnte. Da es

sich hierbei auch meist um ältere Messungen handelt<sup>1)</sup>, wären Kontrollmessungen recht erwünscht.

Es ist bekannt, daß die Auswertung der Hyperfeinstrukturen außerordentlich schwierig ist, besonders bei den Elementen mit mehreren Isotopen. Besonders unsichere Werte wurden deshalb in unserer Zusammensetzung grundsätzlich ausgelassen. Zu betonen ist besonders, daß die beiden Kerne mit  $i_b = 1$  sehr sicher bekannt sind; es sind  $D_1^2$  und  $N_7^{14}$ .

2. Isotopenserien  $Z = \text{const.}$  Wir denken uns eine Serie von Isotopen folgendermaßen entwickelt: Wir beginnen mit dem leichtesten stabilen Kern und lagern der Reihe nach Neutronen an. Trägt man sich die Massendefekte auf, gegen Neutronen und Protonen gerechnet (bzw. gegen Neutronen, Protonen und möglichst viele  $\alpha$ -Teilchen, was bis auf eine additive

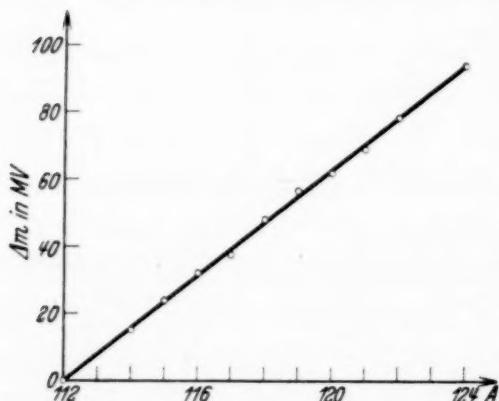


Fig. 1. Massendefekte der Zinnisotope.

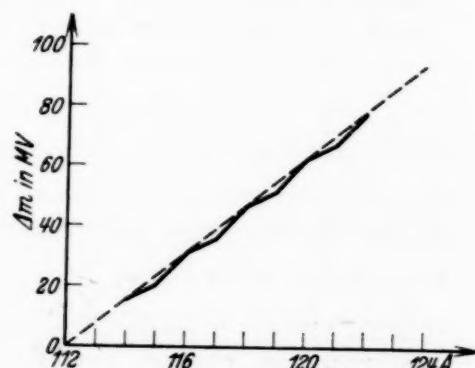


Fig. 2. Massendefektkurve für Zinn, theoretisch.

Konstante dasselbe ist), so ergibt sich bekanntlich ein im wesentlichen linearer Anstieg mit der Masse (vgl. Fig. 1). Die Meßgenauigkeit läßt hierbei noch Abweichungen von der Geraden um  $\pm 2 \cdot 10^6$  e-Volt ohne weiteres zu. Man kann aus diesen Geraden natürlich für jede Isotopenserie eine mittlere „Bindungsenergie pro Neutron“ ausrechnen; sie liegt um  $7 \cdot 10^6$  e-Volt herum und zeigt — für verschiedene Isotopenserien bestimmt — keinen Gang mit der Ordnungszahl. Bis zu diesem Punkte liegt nichts Neues vor, z. B. gegenüber einer vor zwei Jahren erschienenen Arbeit des Verfassers<sup>2)</sup>, in der diese Fragen etwas eingehender dargestellt sind. Wir wollen jetzt im Sinne unserer Bineutronenhypothese annehmen, daß jedesmal

<sup>1)</sup> **Li:** H. Schüler, ZS. f. Phys. **66**, 431, 1930. **Al:** R. C. Gibbs u. P. G. Kruger, Phys. Rev. **37**, 656, 1931. **Ag:** R. de L. Kronig u. S. Frisch, Phys. ZS. **32**, 457, 1931; S. Frisch u. V. Matvejev, C. R. Leningrad **1**, 460, 1934; S. Frisch, Phys. ZS. d. Sowjetunion **1**, 302, 1932. — <sup>2)</sup> S. Flügge, ZS. f. Astrophys. **6**, 272, 1933.

beim Übergang von einem Element mit geradem  $A$  zu einem solchen mit ungeradem  $A$  einfach ein Neutron angelagert wird, bei dem umgekehrten Übergang dagegen von ungerade zu gerade, wenn also der Anfangskern schon ein freies Neutron enthält, das angelagerte Neutron sich mit diesem zu einem Bineutron vereinigt. Demnach steht zu erwarten, daß beim Übergang von ungerade zu gerade ein größerer Unterschied im Massendefekt besteht als beim Übergang von gerade zu ungerade; die Differenz zwischen beiden Arten von Vorgängen würde als Maßstab für die Bindungsenergie des Bineutrons dienen können. An Stelle von Fig. 1 müßte also ein gebrochener Linienzug treten, wie ihn Fig. 2 (übertrieben) darstellt. Ob dies tatsächlich der Fall ist, läßt sich bei der Genauigkeit von einigen Millionen e-Volt, mit der ein solcher Massendefekt bestensfalls bekannt ist, nur sehr schwer sagen. Betrachten wir etwa die 11 Isotope des Zinns ( $Z = 50$ ), so haben wir<sup>1)</sup>:

$A$	= 112	114	115	116	117	118	119	120	121	122	124
$\Delta m$	= 133	148	157	165	170	181	189	195	202	211	226 MV
$\Delta(\Delta m)$ =	15	9	8	5	11	8	6	7	9	15	MV
	( $\Delta A = 2$ )										( $\Delta A = 2$ )

Die Streuung dieser Werte scheint mir zu groß, um irgendwelche bindenden Schlüsse im angegebenen Sinne zu ziehen. Im Widerspruch zum Befund steht unsere Theorie jedenfalls nicht.

*3. Auftreten der Periode 2.* Bei vielen Elementen (z. B. Ag, Br) gibt es zwei Isotope, die um zwei Einheiten auseinander liegen. Ein dazwischen liegendes Isotop konnte durch Beschießung mit Neutronen hergestellt werden; es ist radioaktiv (Negatronenemission). So haben wir z. B.<sup>2)</sup>:

$Z = 35$ , Br:	79 stabil,	$Z = 47$ , Ag:	107 stabil,
	80 zerfällt,		108 zerfällt,
	81 stabil,		109 stabil,
	82 zerfällt,		110 zerfällt.

Diese Erscheinung erklärt sich zwangsläufig, wenn man die Bildung von Bineutronen nach unseren Regeln fordert. Die stabilen Kerne von Br und Ag gehören unserer Klasse  $d$ , die instabilen der Klasse  $b$  an. Es ist klar, daß

<sup>1)</sup> Die Zahlen sind den Zusammenstellungen bei Gamow entnommen; sie wurden im Sinne der Heisenbergschen Neutronen-Protonenhypothese umgerechnet. Sie sind nur bis auf eine additive Konstante richtig. Näheres hierüber vgl. S. Flügge, a. a. O., S. 287ff. — <sup>2)</sup> **Br:** E. Fermi und Mitarbeiter, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 483, 1934. **Ag:** F. Joliot u. L. Kowarski, C. R. **200**, 824, 1935.

für beide Arten ganz verschiedene Stabilitätskriterien gelten müssen. Der Kern  $\text{Br}_{35}^{79}$  enthält 17  $\alpha$ -Teilchen, 1 Deuton, 4 Bineutronen und 1 freies Neutron. Beim Übergang zu  $\text{Br}_{35}^{80}$  ist es offenbar energetisch günstiger, daß aus dem hinzutretenden Neutron ein Negatron befreit wird und das entstehende Proton sich mit dem freien Neutron zu einem Deuton zusammenschließt, das seinerseits mit dem schon vorhandenen Deuton ein  $\alpha$ -Teilchen bildet (Endprodukt:  $\text{Kr}_{36}^{80}$ ), als daß ein zweites Bineutron gebildet wird. Ursache der Instabilität von  $\text{Br}_{35}^{80}$  ist also einfach die ganz überragende Stabilität des  $\alpha$ -Teilchens. So bestätigt eine ganz rohe Abschätzung der Größenordnungen bereits die Richtigkeit der Überlegung. Lagert man dagegen sofort ein ganzes Bineutron an, geht also zu  $\text{Br}_{35}^{81}$  über, so besteht kaum Ursache zu einer Umbildung, da ein solches spin- und ladungsfreies Gebilde sicherlich das bereits bestehende Kerngefüge in geringem Maße beeinflußt.

**4. Relative Häufigkeit von Isotopen.** Betrachten wir wieder eine Isotopenreihe  $Z = \text{const}$  für irgendein Element mit möglichst vielen Isotopen

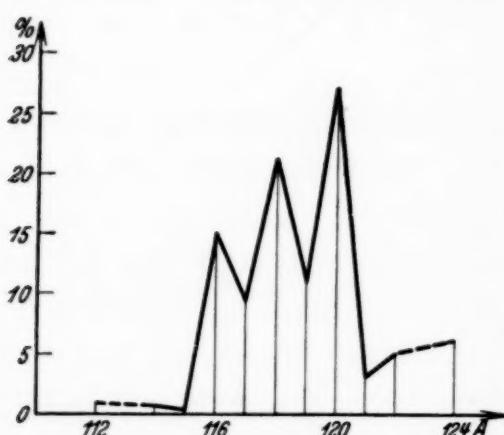


Fig. 3. Relative Häufigkeit der Zinnisotope.

(z. B. Sn, Xe, Kr, Hg u. a.) und tragen die relative Häufigkeit der einzelnen Isotope gegen ihre Massen auf (Fig. 3), so zeigt sich immer eine scheinbar ganz regellose Zackenkurve, die jeder Erklärung Hohn zu sprechen scheint. Eine physikalische Erklärung der Kurve, etwa auf Grund von Stabilitätsbetrachtungen, würde unter allen Umständen verlangen, daß wir eine einfache Glockenkurve erhielten, die bei einem bestimmten Atomgewicht

ein Maximum besitzt und beidseitig monoton von dieser Gleichgewichtslage aus abfallend zu immer selteneren Isotopen führt.

Machen wir uns den eben ausgeführten Gedankengang einer Zweierperiode zunutze, so heißt das, daß wir bei jedem Element zwischen den Kernen mit geradem  $A$  und mit ungeradem  $A$  grundsätzlich zu unterscheiden haben, da ja die eine Art stets ein freies Neutron enthält, die andere nicht. Wir beschränken uns also darauf, nur Kerne zu vergleichen, die isotop sind und der gleichen Klasse angehören, mit anderen Worten: wir verbinden nur die Punkte untereinander, die zu geradem  $A$  gehören, und die untereinander, die zu ungeradem  $A$  gehören, durch einen glatten Kurvenzug.

Der reies  
iger,  
das  
men-  
chen  
wird.  
ende  
der  
man  
steht  
reies  
Maße

Iso-  
open  
agen  
lnen  
(g. 3),  
nbar  
eder  
eint.  
der  
täts-  
allen  
eine  
, die  
richt  
chts-

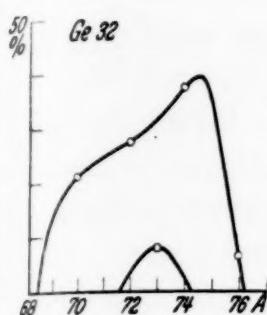


Fig. 4.

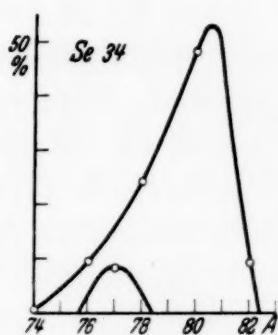


Fig. 5.

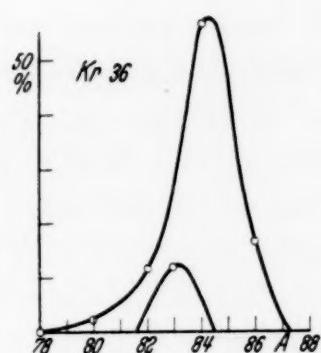


Fig. 6.

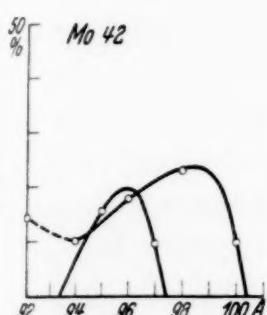


Fig. 7.

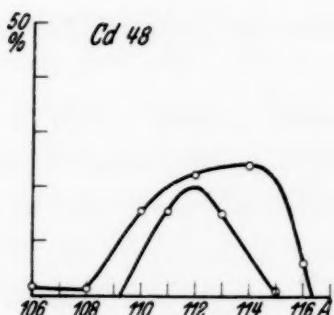


Fig. 8.

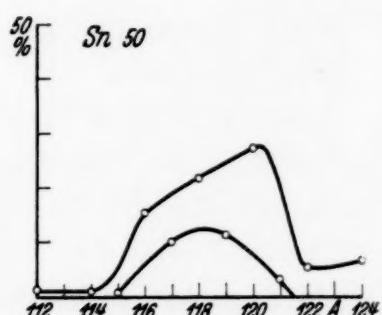


Fig. 9.

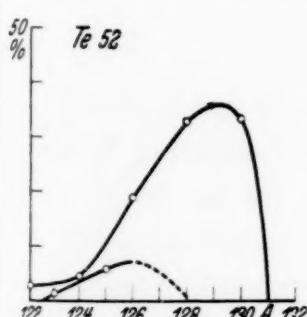


Fig. 10.

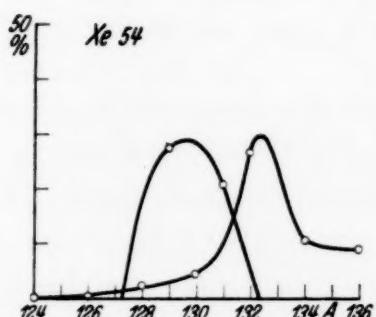


Fig. 11.

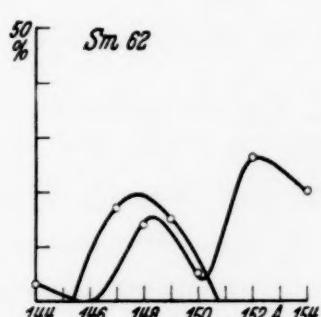


Fig. 12.

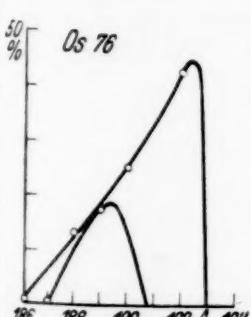


Fig. 13.

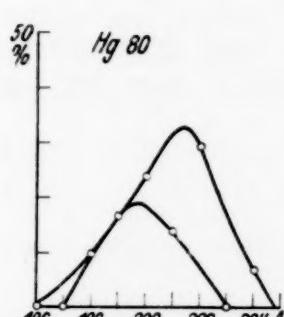


Fig. 14.

Fig. 4 bis 14.  
Relative Häufigkeiten verschiedener  
Isotope, getrennt nach geraden und  
ungeraden Kernmassen ( $A$ ).

Solche Kurven sind in den Fig. 4 bis 14 gezeichnet<sup>1)</sup>. Man erhält tatsächlich in allen Fällen mit Ausnahme von Samarium zwei Kurven, die der theoretischen Forderung genügen. Dabei ist die Gesamthäufigkeit der ungeraden Massen stets geringer als die der geraden. Auffällig ist das Versagen bei Samarium, das offenbar in engem Zusammenhang mit dessen Radioaktivität steht. Wahrscheinlich ist hiernach  $\text{Sm}_{62}^{150}$  das aktive Isotop; zum gleichen Resultat gelangten auf Grund von Hyperfeinstrukturaufnahmen Schüler und Schmidt<sup>2)</sup>. Eine geringfügige Unstimmigkeit liegt auch bei Molybdän vor; man würde eine geringere Häufigkeit von  $\text{Mo}_{40}^{92}$  erwarten. Ob die Störung auch hier durch eine natürliche Aktivität bedingt ist, wage ich nicht zu entscheiden. Sonst ist die Theorie verblüffend gut erfüllt. Damit scheint dies alte Problem der Kernphysik der Lösung einen Schritt näher zu rücken.

Ergänzend sei noch folgendes erwähnt. Die Elemente ungerader Ordnungszahl besitzen abgesehen von den drei Wasserstoffisopen jeweils nur ein oder zwei Isotope. Dabei gilt für F und alle schwereren Elemente die Regel, daß der Typ Klasse *b* überhaupt nicht mehr auftritt, sondern alle Elemente ungerader Ordnungszahl der Klasse *d* angehören. Besitzt ein solches Element zwei Isotope, so unterscheiden sie sich um zwei Masseneinheiten, d. h. eben um ein Bineutron. Die Tendenz zur Bildung langer Isotopenserien ist auf die Kerne gerader Ordnungszahl beschränkt; hierbei ist im allgemeinen Klasse *a* häufiger als *c*.

Zusammenfassend kann man also wohl sagen, daß für das Vorhandensein des Bineutrons eine große Zahl wesentlicher Gesichtspunkte spricht und daß Versuche in dieser Hinsicht erwünscht sind. Ob die bisher vorliegenden Experimente schon direkte Beweise für das Vorhandensein von Bineutronen enthalten, soll in der folgenden Notiz diskutiert werden.

*Frankfurt a. M., Institut f. theoret. Phys. d. Univ., den 14. April 1935.*

---

<sup>1)</sup> Die benutzten Daten wurden entnommen aus F. W. Aston, *Mass spectra and isotopes*, Cambridge 1933, sowie aus den beiden Arbeiten von Aston in Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 46, 1934 und **149**, 396, 1935. —

<sup>2)</sup> H. Schüler u. Th. Schmidt, ZS. f. Phys. **92**, 148, 1934.

## Treten Bineutronen bei Kernumwandlungen auf?

Von S. Flügge und A. Krebs in Frankfurt a. M.

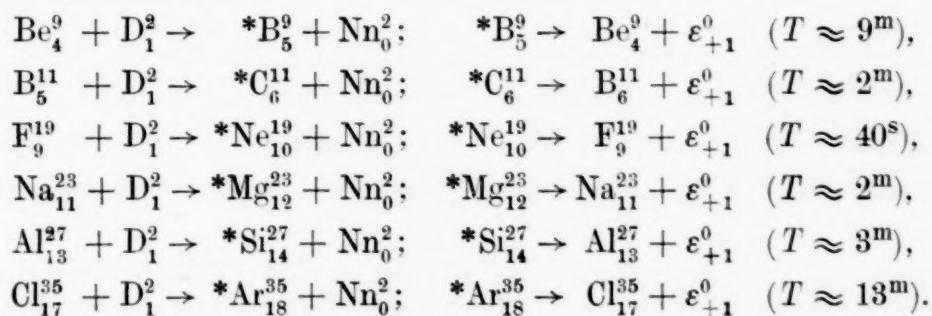
(Eingegangen am 16. April 1935.)

Auf Grund der in der vorstehenden Mitteilung ausgeführten Überlegungen über die Existenz des Bineutrons werden einige Versuche von Lawrence und Mitarbeitern gedeutet.

Die in der vorstehenden Notiz angestellten Betrachtungen über die mögliche Existenz eines „Bineutrons“  $Nn_0^2$  geben einige Möglichkeiten zur Erklärung bisher nicht deutbarer Kernumwandlungsprozesse.

Lawrence und Mitarbeiter<sup>1)</sup> haben eine große Zahl von Elementen mit Deutonen beschossen und anschließend das Auftreten von künstlicher Radioaktivität unter Positronenzerfall festgestellt. Eine große Reihe der beobachteten Prozesse läßt einfache Deutungen zu, die folgendermaßen gewonnen wurden<sup>2)</sup>: Es wurde festgestellt, welche Rückstoßkerne entstünden, wenn beim Zusammenstoß wieder zwei Teilchen fortfliegen, deren eines ein Proton, Neutron,  $\alpha$ -Teilchen, Lichtquant (!), Negatron oder Positron ist. Es wurden dann ausgeschieden 1. alle stabilen Kerne, 2. Kerne, die zur Negatronenemission neigen, und 3. Kerne, deren Halbwertszeit bekannt ist und in Widerspruch zu der angegebenen steht.

Einige Prozesse (Umwandlung von  $Li_3^6$ ,  $O_8^{16}$ ,  $Mg_{12}^{24}$ ,  $Si_{14}^{28}$  oder  $Si_{14}^{29}$ ) lassen sich in dieser Weise deuten, indem man zu Rückstoßkernen gelangt, deren Existenz und Positronenaktivität bekannt ist oder zu erwarten steht. Ungeklärt bleiben in dieser Weise die Umwandlungen von  $Be_4^9$ ,  $B_5^9$ ,  $Na_{11}^{23}$ ,  $Cl_{17}^{35}$ ,  $F_9^{19}$ ,  $Al_{13}^{27}$ . Nimmt man an, daß in allen diesen Fällen die Umwandlung lediglich darin besteht, daß das auftreffende Deuton seine Ladung abgibt und mit antiparallelen Spinen seiner konstituierenden Elementarteilchen als Bineutron weiterfliegt, so lassen sich diese Prozesse sämtlich deuten in der folgenden Form:



<sup>1)</sup> M. C. Henderson, M. S. Livingston u. E. O. Lawrence, Phys. Rev. 45, 428, 1934. — <sup>2)</sup> Phys. ZS., im Druck.

Von den erhaltenen radioaktiven Elementen sind bisher bekannt:  ${}^*B_5^9$  (Halbwertszeit „einige Minuten“)<sup>1)</sup>,  ${}^*C_6^{11}$  (Halbwertszeit  $2^m$  oder  $20^m$ )<sup>2)</sup>,  ${}^*Si_{14}^{27}$  (Halbwertszeit  $2,5^m$ )<sup>3)</sup>; für die Existenz von  ${}^*Ne_{10}^{19}$ ,  ${}^*Mg_{12}^{23}$  und  ${}^*Ar_{18}^{35}$  als positronenaktiven Elementen besteht nach den a. a. O.<sup>4)</sup> von uns angestellten Überlegungen eine erhebliche Wahrscheinlichkeit.

Es ist möglich, daß Bineutronen auch an anderer Stelle schon beobachtet worden sind. Walke<sup>5)</sup> hat darauf hingewiesen, daß die Emission neutraler Korpuskeln von etwa 16 MV, wie sie bei Beschuß von  $Be_4^9$  mit  $\alpha$ -Teilchen von Kurie<sup>6)</sup> und Harkins, Gans und Newson<sup>7)</sup> beobachtet wurde, nur dann in Einklang zu bringen ist mit den durch Vernichtung der Massendefekte im Höchstfalle freiwerdenden Energiebeträgen, wenn man diesen Korpuskeln die Masse 2 zuschreibt. Experimente, die entweder durch Untersuchung der bei den obigen Prozessen emittierten Bineutronen oder durch chemische Untersuchung der gebildeten radioaktiven Substanz eine Entscheidung gestatten, wären hiernach außerordentlich wünschenswert.

*Frankfurt a. M., Institut für theoretische Physik und Institut für physikalische Grundlagen der Medizin der Universität, den 14. April 1935.*

---

<sup>1)</sup> L. Meitner, Naturwissensch. **22**, 420, 1934. — <sup>2)</sup> M. C. Henderson, M. S. Livingston und E. O. Lawrence, Phys. Rev. **45**, 428, 1934; H. R. Crane u. C. C. Lauritsen, ebenda **45**, 430, 1934. — <sup>3)</sup> I. Curie u. F. Joliot, C. R. **198**, 559, 1934; Journ. de phys. et le Radium (7) **5**, 153, 1934. — <sup>4)</sup> Phys. ZS., im Druck. — <sup>5)</sup> H. Walke, Nature **132**, 242, 1933. — <sup>6)</sup> F. N. D. Kurie, Phys. Rev. **43**, 771, 1933. — <sup>7)</sup> W. D. Harkins, D. M. Gans u. H. M. Newson, ebenda **43**, 584, 1933.

## Neue Bandensysteme des Kupferhydrids.

Von Tage Heimer in Stockholm.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 17. April 1935.)

Im ultravioletten Gebiet des Spektrums des Kupferhydrids sind zwei neue Bandensysteme  $^1\pi - ^1\Sigma$  gefunden und analysiert.

**§ 1.** Die Kupferhydridbanden sind früher untersucht worden sowohl in Absorption als in Emission<sup>1)</sup>. Durch die Untersuchungen von Heimer und Verfasser<sup>2)</sup> sind die Kernschwingungsniveaus des früher bekannten  $^1\Sigma^* - ^1\Sigma$ -Systems erweitert und außerdem noch ein zweites Elektronensystem  $^1\Sigma^{**} - ^1\Sigma$  gefunden, wodurch ein neuer aktiverter  $^1\Sigma^{**}$ -Term festgelegt wurde. Ein solcher  $^1\Sigma$ -Term wurde auch von Hulthén und Zumstein<sup>3)</sup> wegen Analogie mit dem Goldhydrid erwartet. Die Erzeugung der Banden durch Verwendung eines Lichtbogens mit negativer Kohlenelektrode und mit einer Legierung von Wismut und Kupfer als positiver Elektrode ist früher in dieser Zeitschrift<sup>2)</sup> beschrieben.

**§ 2.** Durch erweiterte Untersuchungen sind zwei neue Banden in dem  $^1\Sigma^* - ^1\Sigma$ -System, drei in dem  $^1\Sigma^{**} - ^1\Sigma$ -System und außerdem noch fünf andere Banden gefunden und analysiert. Die fünf letzten Banden haben alle denselben Endzustand wie die früher bekannten Bandensysteme. Da diese fünf Banden aus einfachen *P*-, *Q*- und *R*-Zweigen bestehen, wobei die Intensitätsfolge  $Q > R > P$  ist, werden diese Banden als einem  $^1\pi - ^1\Sigma$ -Übergang gehörend gedeutet. Die Isotopieaufspaltung, die von den beiden Kupferisotopen 63 und 65 verursacht ist, tritt auch in diesen neuen Banden deutlich hervor, ist aber wegen ungenügender Auflösung nicht Gegenstand einer Isotopieanalyse geworden.

**§ 3.** In der Tabelle 1 sind die gemessenen Linien der neuen Banden des  $^1\Sigma^* - ^1\Sigma$ -Systems, in der Tabelle 2 die Banden des  $^1\Sigma^{**} - ^1\Sigma$ -Systems und schließlich in den Tabellen 3 bis 5 die Linien der  $^1\pi - ^1\Sigma$ -Banden zusammengestellt worden. In die Tabelle 6 sind die Kombinationsdiffe-

<sup>1)</sup> R. Frerichs, ZS. f. Phys. **20**, 170, 1923; E. Bengtsson, ebenda, S. 229; H. Stücklen, ebenda **34**, 562, 1925; E. Hulthén u. R. V. Zumstein, Phys. Rev. **28**, 13, 1926; E. Bengtsson u. E. Hulthén, Trans. Faraday Soc. **25**, 751, 1929; A. Heimer u. T. Heimer, ZS. f. Phys. **84**, 222, 1933. — <sup>2)</sup> A. Heimer u. T. Heimer, l. c. — <sup>3)</sup> E. Hulthén u. R. V. Zumstein, l. c.

renzen der drei neuen  $^1\Pi$ -Kernschwingungszustände eingeführt. Durch die Analyse der Banden sind drei neue Niveaus, dem  $^1\Pi - ^1\Sigma$ -Übergang gehörend, festgelegt worden. Wegen der Größe der  $\Delta G(v + \frac{1}{2})$ -Werte werden zwei von diesen Niveaus einem  $^1\Pi^*$ -Term und das dritte Niveau einem  $^1\Pi^{**}$ -Term zugeschrieben. Vorläufig wird angenommen, daß die beiden ersten Niveaus die Kernschwingungsniveaus  $v = 0$  und  $v = 1$  sind, und daß das Niveau des  $^1\Pi^{**}$ -Terms das Kernschwingungsniveau  $v = 0$  ist. In die Fig. 1 ist das Niveauschema der fünf Elektronenzustände mit den Werten

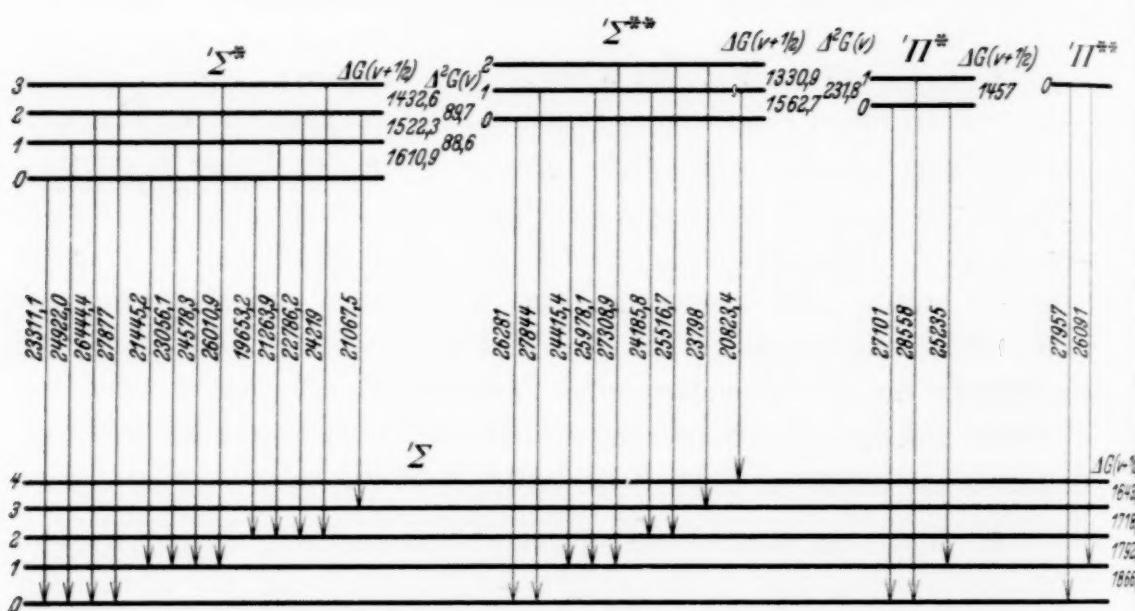


Fig. 1.

$v_0$ ,  $\Delta G(v + \frac{1}{2})$  und  $\Delta^2 G(v)$  eingetragen. In die Tabellen 7 bis 10 sind die Kernschwingungsdiagramme der verschiedenen Elektronenzustände eingeführt. Die aus den Rotationstermdifferenzen berechneten Konstanten der  $^1\Pi$ -Zustände sind in der Tabelle 11 zusammengestellt.

Ähnliche Unregelmäßigkeiten in den Kurven  $\Delta_2 F/J + \frac{1}{2}$  als Funktion von  $J(J+1)$  wie für die beiden aktivierte  $^1\Sigma$ -Zustände sind auch für die aktivierte  $^1\Pi$ -Zustände ( $v = 1$  in  $^1\Pi^*$  und  $v = 0$  in  $^1\Pi^{**}$ ) wiederzufinden.

Die Bandenkonstanten der  $^1\Pi$ -Zustände und der Dissoziationswert des  $^1\Pi^*$ -Terms sind in die Tabelle 12 eingetragen.

Die  $\lambda$ -Aufspaltung ist für die beiden  $^1\Pi$ -Zustände bestimmt worden und in der Tabelle 13 aufgeführt. Auf graphischem Wege sind die  $\gamma$ -Werte in der Formel  $\Delta T_{dec}(J) = \gamma \cdot J(J+1)$  bestimmt und dabei sind die in Tabelle 14 wiedergegebenen Werte erhalten.

Tabelle 1.  $^1\Sigma^* - ^1\Sigma$ .

J	$\lambda 3586 \text{ (3-0)}$		J	$\lambda 4127 \text{ (3-2)}$	
	R	P		R	P
0	27888,74		11	24186,58	
1	97,24	27861,44	12	69,17	
2	901,32	41,93		69,59	
3	01,32	18,75	13	49,87	
4	898,02	791,62	14	27,18	23784,49
5	91,23	61,03	15		37,56
6	80,57	26,84			38,26
7	66,79	689,32	16	076,13	689,00
8	49,47	47,97		76,53	89,72
9	29,15	03,55	17	46,70	38,38
10	05,55	555,94			39,14
11	779,06	05,56	18	15,81	585,72
12	49,51	452,31			86,44
13	16,68	396,32	19	23980,49	31,12
14	680,73	37,59		80,99	31,84
15		275,96	20	43,25	475,05
16		11,53		43,86	
			21	03,84	15,29

Tabelle 2.  $^1\Sigma^{**} - ^1\Sigma$ .

J	$\lambda 3804 \text{ (0-0)}$		J	$\lambda 3590 \text{ (1-0)}$		J	$\lambda 4200 \text{ (2-3)}$	
	R	P		R	P		R	P
0	26294,53		9	27803,49		3	23825,11	23747,42
1	304,73	26266,12	10	778,33	27531,76	4	24,08	24,34
2	11,50	47,68	11	48,24	480,32	5	19,97	698,32
3	16,41	26,56	12	13,88	25,12	6	12,75	69,38
4	18,01	02,71	13	675,24	365,60	7	02,26	37,47
5	16,93	176,08	14	32,24	02,14	8	788,69	02,51
6	12,98	46,74	15	584,96	234,56	9	71,75	563,10
7	06,21	14,92	16	33,78	163,15	10	51,78	23,75
8	296,53	080,33	17	477,92	087,89	11	28,31	479,87
9	83,80	43,01	18	18,28	08,71	12	01,97	32,83
10	67,62	03,08	19	354,25	26925,69	13	671,20	383,10
11		25960,40	20	285,79	839,20			
12		14,64	21	13,66				
13		864,09	22	135,85				
				36,35				

§ 4. Der  $v_e$ -Wert und der erhaltene Dissoziationswert des  $^1\Pi^*$ -Terms deutet mit größter Wahrscheinlichkeit darauf hin, daß die Dissoziationsgrenze dieses  $^1\Pi$ -Terms an den  $^2D$ -Term des Kupferatoms verlegt werden muß. Da nur ein Kernschwingungsniveau des anderen  $^1\Pi^{**}$ -Terms bisher bekannt ist, ist es nicht möglich, den Dissoziationswert dieses Elektronenterms zu berechnen. Der  $v_0$ -Wert, der wenigstens vorläufig als 0—0-Bande

betrachteten Bande des  $^1\Pi^{**} - ^1\Sigma$ -Systems, liegt aber in der Nähe von dem  $\nu_0$ -Wert der 0—0-Bande des  $^1\Pi^* - ^1\Sigma$ -Systems, weshalb man vermuten kann, daß auch die Dissoziationsgrenze dieses Terms an dem  $^2D$ -Term liegt. In welchen von den beiden Termen  $^2D_{5/2}$  und  $^2D_{3/2}$  der eine und der andere  $^1\Pi$ -Term dissoziiert wird, ist aber vorläufig unmöglich zu sagen.

Tabelle 3.  $\lambda 3689. \ ^1\Pi^* - ^1\Sigma. (0 - 0)$ .

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
1	27123,91		27098,36	14	26988,79	26629,82	26797,88
2	30,93	27067,31	92,60	15	58,01	576,10	54,56
3	34,75	45,78	83,89	16	24,24	19,91	08,36
4	36,35	21,85	72,36	17	887,56		659,31
5	34,75	26994,80	57,89	18	47,98		07,19
6	30,18	65,15	40,58	19	05,46		552,28
7	22,70	32,76	20,31	20	760,00		494,52
8	12,32	897,49	26997,16	21	11,55		33,61
9	099,04	59,53	71,14	22	660,22		369,54
10	82,91	19,13	42,46	23	05,73		02,76
11	63,72	775,72	10,47	24	548,30		
12	41,71	29,67	875,77	25	487,75		
13	16,72	681,01	38,30				

Tabelle 4.  $^1\Pi^* - ^1\Sigma$ .

<i>J</i>	$\lambda 3501. (1 - 0)$			$\lambda 3962. (0 - 1)$		
	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
4			28520,94			
5	28577,20		03,04			
6	68,30		481,41			
7	56,27		56,33			
8	40,10	28335,80	27,66			
9	20,95	293,03	395,41			
10	498,26	46,67	59,63			
11	72,00	197,31	20,28	25230,81		25077,73
12	42,58		277,41	14,78	24902,46	48,65
13	09,98	089,31	31,21	196,05	860,35	17,62
14	374,31	30,74	181,79	75,61	16,56	24984,74
15	35,80	27969,47	29,24	51,81	769,85	48,35
16	294,79	05,09	073,99			
17	51,78	838,52	17,98	097,80	670,89	869,51
18	07,02	769,77		67,13		26,37
19	161,04			34,06		780,81
20	13,67			24998,61		32,83
21	063,45			60,19		682,25
22	11,52			19,81		29,18
23				876,69		573,33
24				30,94		15,52

Tabelle 5.  $^1\Pi^{**} - ^1\Sigma$ .

J	$\lambda 3576 \text{ (0 - 0)}$			$\lambda 3832 \text{ (0 - 1)}$		
	R	P	Q	R	P	Q
1			27953,85			26087,95
2			46,58			81,78
3	27985,01		35,21	26122,06		72,42
4	83,26	27874,19	21,18	22,06		60,14
5	78,11	44,72	03,36	19,38		44,61
6	69,47	11,83	881,96	14,15		26,21
7	57,56	775,91	57,20	05,38	25923,76	04,99
8	42,50	36,80	29,15	094,63	888,64	25980,99
9	24,26	694,53	797,95	80,33	50,78	54,31
10	02,91	49,07	63,49	64,33	10,46	24,80
11	878,51	00,85	26,05	45,39	767,90	892,96
						93,48
12	51,08	549,80	685,58	23,96	22,14	58,48
13	20,67	495,97	42,24	25999,87	675,19	21,61
14	787,51	39,44	595,97	74,04	25,52	782,36
15	51,38	380,29	47,01	45,33	574,05	82,97
16	12,48		495,11	14,64	20,25	40,83
				15,11		41,47
17	670,80		40,58	881,11	464,41	97,61
				81,72		50,90
18	25,86		383,11	45,60	06,80	51,49
				46,15		02,51
19	579,23		22,85	07,91		03,24
				08,48		551,53
20	29,27		258,54	767,90		52,22
				68,44		497,08
21	477,92					97,69
22	21,61					
23	363,66					
24	02,80					

Tabelle 6.  $\Delta_2 F(J) = F(J+1) - F(J-1)$ .

J	$^1\Pi^*$			$^1\Pi^{**}$		
	v = 0	v = 1	v = 0	J	v = 0	v = 1
2	63,62			11	288,00	
3	88,97			12	312,04	382,69
4	114,50		109,07	13	335,71	411,84
5	139,95		133,39	14	358,97	440,51
6	165,03		157,64	15	381,91	469,22
7	189,94	232,50	181,65	16	404,33	497,28
8	214,83	263,24	205,70	17		525,02
9	239,54	293,43	229,73	18		416,70
10	263,78	323,64	253,84			438,80

Tabelle 7.  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma$ .

$v'' \backslash v'$	0	1	2	3
0	23 311,1	24 922,0	26 444,4	27 877
1	21 445,2	23 056,1	24 578,3	26 010,9
2	19 653,2	21 263,9	22 786,2	24 219
3			21 067,5	

Tabelle 8.  ${}^1\Sigma^{**} - {}^1\Sigma$ .

$v'' \backslash v'$	0	1	2
0	26 281	27 844	
1	24 415,4	25 978,1	27 308,9
2		24 185,8	25 516,7
3			23 798
4			20 823,4

Tabelle 9.  ${}^1\Pi^* - {}^1\Sigma$ .

$v'' \backslash v'$	0	1
0	27 101	28 558
1	25 235	

Tabelle 10.  ${}^1\Pi^{**} - {}^1\Sigma$ .

$v'' \backslash v'$	0
0	27 957
1	26 091

Tabelle 11.

Elektronenzustand	$v$	$B_v$	$D_v$
Erregter Zustand ${}^1\Pi^*$	0	6,383	- 0,000 466
	1	6,056	- 0,000 319
Erregter Zustand ${}^1\Pi^{**}$	0	6,070	- 0,000 125

Tabelle 12.

Elektronenzustand	$B_e$	$\alpha_e$	$r_e \cdot 10^8$	$v_e$	$\omega_e$	$\omega_e x_e$	$D \text{ cm}^{-1}$
Erregter Zustand ${}^1\Pi^*$	6,547	0,327	1,684	~27 264	~1568	~54,8	~11 000
Erregter Zustand ${}^1\Pi^{**}$	—	—	( $r_0 = 1,749$ )	( $v_0 = 27 957$ )	—	—	—

Tabelle 13. Die  $\lambda$ -Aufspaltung.

$J$	${}^1\Pi^*$		$v = 0$	${}^1\Pi^{**}$		$v = 0$	$J$	${}^1\Pi^*$		$v = 0$
	$v = 0$	$v = 1$		$v = 0$	$v = 1$			$v = 0$	$v = 1$	
2	0,22						10	5,90	15,7	14,47
3	0,35						11	7,15		
4	0,90						12	8,65	22,3	19,06
5	1,43						13	10,36	27,7	21,42
6	2,05		6,71				14	12,45	32,7	24,90
7	2,72		8,04				15	15,00	37,7	27,78
8	3,55	10,06	10,11				16		41,3	31,18
9	4,80	12,58	11,68				17			34,50

Im Bandenspektrum des Goldhydrids sind die zwei aktivierte  $^1\Sigma$ -Terme, die den beiden  $^1\Sigma$ -Termen des Kupferhydrids entsprechen, früher gefunden und auch den beiden Atomtermen  $^2D_{5/2}$  und  $^2D_{3/2}$  zugeschrieben. Man kann daher, mit Rücksicht auf die ähnliche Struktur der Cu-, Ag- und Au-Hydride, erwarten, daß auch AgH und AuH zwei  $^1\Pi$ -Terme haben, die den gefundenen  $^1\Pi$ -Termen des CuH-Moleküls entsprechen.

Tabelle 14.

	$^1\Pi^*$		$^1\Pi^{**}$
	$v = 0$	$v = 1$	$v = 0$
$\gamma$	0,022	0,060	0,055

Eine Untersuchung des Bandenspektrums des Kupferdeutrids ist angefangen und kann hoffentlich u. a. näheren Bescheid betreffs einiger in dieser Arbeit erwähnten Fragen geben. Im roten Gebiet des Spektrums des Kupferhydrids sind einige diffuse Banden gefunden. Diese Banden sind gemessen, haben aber bisher nicht analysiert werden können. Auch diese Banden sind Gegenstand näherer Untersuchungen.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. E. Hulthén danke ich herzlich für sein liebenswürdiges Entgegenkommen während der Arbeit.

Stockholm, Physikalisches Institut der Universität, April 1935.

## Über das Bandenspektrum des Wismuthydrids.

Von Alf Heimer in Stockholm.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 17. April 1935.)

Im Bandenspektrum des Wismuthydrids sind drei Bandensysteme gefunden, ein  $^1\Sigma^* - ^1\Sigma$ - und ein  $^1\Sigma^* - ^1\Pi$ -System, die gemeinsamen Anfangszustand haben, und ein  $^1\Sigma_x - ^1\Sigma_y$ -System, welches mit den anderen Systemen nicht kombiniert. In  $^1\Sigma$  und in  $^1\Pi$  sind die drei ersten Kernschwingungsniveaus und in  $^1\Sigma^*$  die zwei ersten Kernschwingungsniveaus festgestellt worden. Im  $^1\Sigma_x - ^1\Sigma_y$ -System sind das gefundene Kernschwingungsniveau des Anfangszustandes als  $v = 0$  und die beiden Kernschwingungsniveaus des Endzustandes als  $v = 0$  und  $v = 1$  bezeichnet. Die Dissoziationswerte sind berechnet und die  $\lambda$ -Aufspaltung ist untersucht worden.

**§ 1.** Beim Benutzen eines Lichtbogens in Wasserstoffatmosphäre fanden Hulthén und Verfasser<sup>1)</sup> eine Bande in der Nähe der Wismutlinie  $\lambda 4722$ . Dabei wurde Kohle als obere Elektrode verwendet, während die untere Elektrode aus einer eisernen mit Wismutmetall gefüllten Schale bestand. Der Wasserstoffdruck war 10 bis 20 mm Hg. Wegen Verunreinigungen, zunächst durch die Kohlenelektrode verursacht, war es aber unmöglich, die Banden mit größerer Intensität rein zu erhalten, weshalb der Lichtbogen gegen ein Geißler-Rohr ausgetauscht wurde. Bei den ersten Versuchen wurde das Rohr mit Gleichstrom von etwa 1200 Volt Spannung und einer Stromstärke von etwa 0,5 Amp. gespeist. Bei den späteren Versuchen<sup>2)</sup> ist aber Wechselstrom von 3000 Volt Spannung benutzt. Das Geißler-Rohr war aus Quarz und bestand aus einer Kapillare, die ungefähr 15 cm lang und an jedem Ende in eine kugelförmige Schale ausgeblasen war. Die eine Schale wurde als Behälter für das Wismutmetall benutzt, welches beim Betrieb im geschmolzenen Zustand bei einer Temperatur von etwa  $900^\circ\text{C}$  gehalten wurde. Der Wasserstoff durchströmte dauernd die Kapillare in der Richtung von dem Wismutbehälter nach der leeren Schale, und während des Versuches destillierte das Metall allmählich in die letztgenannte Schale über. Die Intensität der Banden wurde hierdurch beträchtlich erhöht, wodurch die meisten Banden mit hoher Dispersion ( $1 \text{ \AA/mm}$  in der zweiten Ordnung des hiesigen großen Konkavgitters) photographiert werden konnten. Einige Banden im ultraroten Gebiet und einige Banden im grünen Gebiet des Spektrums konnten nur in einem lichtstarken Plangitter (Dispersion  $5 \text{ \AA/mm}$ ) erhalten werden.

---

<sup>1)</sup> A. Heimer u. E. Hulthén, Nature **127**, 557, 1931. — <sup>2)</sup> E. Hulthén u. A. Heimer, ebenda **129**, 399, 1932.

§ 2. Die Banden, die im blauen Gebiet des Spektrums liegen, haben einfache *P*- und *R*-Zweige mit wohl aufgelösten Linien und werden demgemäß einem Übergang  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma$  im BiH-Molekül zugeschrieben. Fünf Banden dieses Bandensystems sind gemessen und analysiert worden. Fig. 1 zeigt die 0—0-Bande des Systems. Zwischen den Linien der 0—0-Bande sind auch die Linien der 1—1-Bande sichtbar. Die im roten Teil des Spektrums liegenden Banden haben einfache *P*-, *Q*- und *R*-Zweige und gehören einem  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Pi$ -System mit demselben Anfangszustand an wie das blaue System. Die Zahl der analysierten Banden ist hier vier. In der 0—0-Bande dieses Systems deuten gewisse Zeichen darauf hin, daß eine Hyperfeinstruktur existiert, die dem Kernspin des Wismutatoms zugeschrieben werden könnte. Um eine Entscheidung betreffs der Existenz der Hyperfeinstruktur zu erlangen, ist es aber notwendig, die Banden mit größerer Auflösung zu erhalten. Dies Bandensystem sowohl als auch das entsprechende System des Wismutdeutrids ist deswegen Gegenstand weiterer Untersuchungen von Hulthén und Verfasser.

Im grünen Gebiet des Spektrums liegen zwei Banden mit nur wenigen Linien, einem Übergang  ${}^1\Sigma_x - {}^1\Sigma_y$  gehörend. Diese beiden Banden kombinieren nicht mit den früher genannten Bandensystemen, weshalb es in Frage gestellt werden kann, ob diese Banden überhaupt dem Wismutmolekül zugehören. Als eventuelle Verunreinigungen des Wismutmetalles kommen in erster Linie Arsenik und Antimon in Frage. Untersuchungen mit diesen Metallen sind deshalb unter denselben Bedingungen (in Wasserstoffatmosphäre) angestellt worden, aber es wurde dabei keine



Fig. 1. Spektrogramm der 0—0-Bande  $\lambda 4698$  des BiH-Moleküls. Die Linien der 1—1-Bande  $\lambda 4697$  sind auch sichtbar. Die Aufnahme zeigt deutlich sowohl den Intensitätsverlauf als auch die Nullage  $v_0$ .

Spur der betreffenden Banden beobachtet. Die Banden werden deshalb, obwohl mit Vorbehalt, dem Wismutmolekül zugeschrieben. Die beiden Elektronenzustände werden im Anfangszustand als  ${}^1\Sigma_x$  und im Endzustand als  ${}^1\Sigma_y$  bezeichnet. Der Anfangszustand ist für die beiden Banden gemeinsam. Vorläufig wird das gemeinsame Kernschwingungsniveau des Anfangszustandes als  $V = 0$  und die beiden Kernschwingungsniveaus des Endzustandes werden als  $v = 0$  und  $v = 1$  bezeichnet. Die Intensität der Banden ist relativ groß, nimmt aber mit steigender Rotationsquantenzahl stark ab, weshalb nur wenige Linien auftreten. Dies nebst dem großen  $r_0$ -Wert deutet auf eine große Instabilität des Moleküls hin. Da es denkbar wäre, daß diese Banden wie die bekannten Banden im Spektrum des Calciumhydrids Druckeffekt zeigen könnten, wurden Versuche angestellt, die Banden im Lichtbogen unter veränderlichem Druck aufzunehmen, aber genau wie für die anderen Wismuthydrbanden nahm die Intensität mit steigendem Druck schnell ab.

§ 3. In den Tabellen 1 bis 9 sind die gemessenen Bandenlinien aufgeführt; in den Tabellen 10 und 11 sind die Kombinationsdifferenzen der verschiedenen Kernschwingungszustände der drei Bandensysteme zusammengestellt.

Tabelle 1.  $\lambda 4698. {}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma (0 - 0)$ .

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
0	21 288,75		12	21 435,36	21 177,77	24	21 611,16	21 123,75
1	299,46	21 268,21	13	449,12	171,41	25	626,47	121,22
2	310,49	258,38	14	463,10	165,57	26	641,86	119,00
3	321,78	248,88	15	477,27	159,92	27	657,23	117,02
4	333,38	269,37	16	491,61	154,69	28	672,56	115,29
5	345,24	230,80	17	506,12	149,71	29	687,83	113,79
6	357,35	222,23	18	520,77	145,07	30	703,05	112,51
7	369,72	214,00	19	535,57	140,75	31	718,3	111,47
8	382,37	206,10	20	550,50	136,72	32	733,3	110,63
9	395,27	198,49	21	565,55	133,05	33	748,1	109,97
10	408,41	191,28	22	580,67	129,65			
11	421,76	184,34	23	595,88	126,56			

Tabelle 2.  $\lambda 4697. {}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma (1 - 1)$ .

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
0	21 295,75		6	21 360,48	21 230,27	12	21 431,51	21 183,45
1	306,00	21 275,87	7	371,91	221,83	13	443,80	
2	316,52	266,26	8	383,53	213,64	14	456,17	
3	327,20	256,94	9	395,27	205,74	15	468,61	
4	338,08	247,79	10	407,26	198,10	16	481,12	
5	349,19	238,90	11	419,31	190,64	17	493,64	
						18	506,12	

Tabelle 3.  $\lambda 5089$ .  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma$  (0 — 1).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
1	19 664,4		10	19 789,1	19 572,1	19	19 956,4	
2	675,7	19 623,2	11	805,7	568,5	20	977,2	
3	687,8	614,8	12	822,7	565,6	21	998,5	
4	700,8	606,5	13	840,7	563,1	22	20 020,4	
5	713,9	591,8	14	858,7	561,2	23	042,3	
6	728,0	592,9	15	877,5	559,5	24	064,5	
7	742,4	586,9	16	896,4		25	087,3	
8	757,3	581,5	17	915,8		26	110,3	
9	773,0	576,7	18	936,0		27	133,6	

Tabelle 4.  $\lambda 5071$ .  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma$  (1 — 2).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
1	19 733,9		8	19 822,7	19 652,6	15	19 932,5	19 627,2
2	745,4		9	836,9	647,2	16	950,0	625,5
3	757,3		10	852,0	642,4	17	967,2	623,9
4	768,9	19 678,6	11	867,2	638,1	18	985,2	
5	781,8	671,4	12	882,8	634,6	19	20 003,0	
6	795,0	664,4	13	899,1	631,4			
7	808,4	658,4	14	915,8	629,0			

Tabelle 5.  $\lambda 4361$ .  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Sigma$  (1 — 0).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
0	22 931,5		8	23 008,60	22 838,70	16	23 076,4	22 752,24
1	941,46	22 911,3	9	017,71	828,10	17	083,9	741,21
2	951,39	901,03	10	026,67	817,46	18	091,0	729,9
3	961,16	890,85	11	035,48	806,76	19	098,1	718,6
4	970,85	880,52	12	044,09	796,00	20	104,6	707,1
5	980,47	870,14	13	052,45	785,47	21	111,0	695,5
6	989,96	859,72	14	060,68	774,32			
7	999,34	849,24	15	068,6	763,35			

Tabelle 6.  $\lambda 6118$ .  ${}^1\Sigma^* - {}^1\Pi$  (0 — 0).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
1	16 362,07	16 330,69	16 342,12	15	16 512,83	16 195,57	16 353,87
2	373,13	321,09	342,29	16	523,59	186,65	355,40
3	383,79	310,99	342,47	17	534,25	177,70	356,97
4	394,47	300,76	342,81	18	544,60	169,04	358,62
5	405,16	290,66	343,35	19	555,30	160,45	360,33
6	415,85	280,69	343,98	20	565,83	152,05	362,07
7	426,59	270,81	344,70	21		143,60	363,83
8	437,38	261,06	345,53	22		140,74	365,69
9	448,17	251,38	346,46	23		135,46	367,52
10	458,97	241,80	347,48	24			369,40
11	469,77	232,52	348,60	25			371,24
12	480,55	222,95	349,79	26			373,11
13	491,34	213,70	351,08	27			374,92
14	502,14	204,54	352,46				

Tabelle 7.  $\lambda 6814.$   ${}^1\Sigma^* - {}^1\Pi$  (0 — 1).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
1	14693,8	14662,5	14672,7	16	14896,7	14559,8	14728,4
2	704,8	652,9	673,8	17	912,7	556,3	735,3
3	716,4	643,6	675,1	18	928,8	553,3	742,6
4	728,4	634,8	676,8	19	945,3	550,6	750,2
5	740,6	626,2	678,9	20	962,1	548,3	758,2
6	753,1	618,1	681,1	21	979,1	546,6	766,3
7	766,2	610,4	683,9	22	996,3	545,3	775,3
8	779,4	603,1	685,7	23	15013,5	544,4	784,3
9	792,9	596,3	691,2	24	031,3	543,9	793,7
10	806,9	589,8	695,3	25	049,2	543,9	803,4
11	821,2	583,7	699,9	26			813,4
12	835,7	578,1	704,8	27			823,8
13	850,5	572,9	710,1	28			834,4
14	865,6	568,1	715,8	29			844,9
15	881,0	563,7	722,0				

Tabelle 8.  $\lambda 6792.$   ${}^1\Sigma^* - {}^1\Pi$  (1 — 2).

<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>J</i>	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>Q</i>
2	14749,0	14698,7	14718,8	12	14871,6	14623,4	14745,6
3	760,2	689,7	720,2	13	886,4	618,1	750,2
4	771,4	681,1	721,5	14	902,0	612,6	755,1
5	782,9	672,7	723,3	15	917,3	607,7	760,2
6	794,8	664,4	725,4	16		603,1	766,2
7	806,9	656,7	728,0	17		598,8	771,4
8	819,4	649,4	730,8	18		595,2	
9	832,1	642,4	734,0	19		591,5	
10	844,9	635,8	737,6	20		588,5	
11	858,1	629,4	741,4				

Tabelle 9.  ${}^1\Sigma_x - {}^1\Sigma_y$ .

<i>J</i>	$\lambda 4842$ (0 — 0)		$\lambda 5171$ (0 — 1)	
	<i>R</i>	<i>P</i>	<i>R</i>	<i>P</i>
0	20654,7		19340,9	
1	661,7	20638,4	348,3	19325,0
2	667,5	628,9	355,1	316,1
3	672,4	618,6	360,5	306,5
4	676,4	607,2	365,4	296,5
5	679,7	594,9		285,8
6		581,7		275,0

§ 4. Durch die Analyse der Banden sind die zwei ersten Kernschwingungsniveaus im  ${}^1\Sigma^*$ -Zustand, die drei ersten Kernschwingungsniveaus im  ${}^1\Sigma$ -Zustand und die drei ersten Kernschwingungsniveaus im  ${}^1\Pi$ -Zustand festgelegt worden. Fig. 2 zeigt das Niveauschema dieser drei Elektronenzustände. Da die beiden Banden im grünen Gebiet des Spektrums

nicht mit den übrigen Wismutbanden kombinieren, haben diese zwei Elektronenzustände nicht in das Niveauschema eingeordnet werden können. Die aus den Rotationstermdifferenzen berechneten Konstanten sind in der Tabelle 12 wiederzufinden.

Tabelle 10.  $A_2F(J) = F(J+1) - F(J-1)$ .

J	$^1\Sigma^*$		$^1\Sigma$			$^1\Pi$		
	v = 0	v = 1	v = 0	v = 1	v = 2	v = 0	v = 1	v = 2
1	31,25	30,13	30,37	29,49				
2	52,11	50,31	50,60	49,06		51,08	50,2	
3	72,90	70,29	70,85	68,73		72,37	70,0	67,9
4	93,71	90,31	91,00	88,30	85,9	93,13	90,2	87,5
5	114,44	110,31	111,14	107,81	104,5	113,78	110,3	107,0
6	135,12	130,23	131,24	127,36	123,4	134,35	130,2	126,2
7	155,72	150,09	151,26	146,84	142,4	154,79	150,0	145,4
8	176,27	169,90	171,24	166,17	161,2	175,21	169,9	164,5
9	196,78	189,57	191,12	185,43	180,3	195,58	189,6	183,6
10	217,13	209,19	210,94	204,63	198,8	215,85	209,2	202,7
11	237,42	228,70	230,66	223,81	217,4	236,02	228,8	221,5
12	257,59	248,08	250,01	242,6	235,8	256,07	248,3	240,0
13	277,71	266,98	269,78	261,5	253,8	276,01	267,6	259,0
14	297,53	286,36	289,15		271,9	295,77	286,8	278,7
15	317,35	305,2	308,41		290,3	315,49	305,8	298,9
16	336,92	324,2	327,56		308,6	335,13	324,7	318,5
17	356,41	342,7	346,54			354,55	343,4	
18	375,70	361,1	365,37			373,80	362,1	
19	394,82	379,5	384,05			392,55	380,5	
20	413,78	397,5	402,52			411,70	398,7	
21	432,50	415,5	420,85				416,8	
22	451,02		438,99				434,7	
23	469,32		456,92				452,4	
24	487,41		474,66				469,6	
25	505,25		492,16					
26	522,86		509,45					
27	540,21		526,57					
28	557,27		543,44					
29	574,04		560,05					
30	590,54		576,36					
31	606,8		592,42					
32	622,7		608,3					
33	638,1							

Tabelle 11.  $A_2F(J) = F(J+1) - F(J-1)$ .

J	$^1\Sigma_y$		$^1\Sigma_x$
	v = (0)	v = (1)	v = (0)
1	25,8	24,8	23,3
2	43,1	41,8	38,8
3	60,3	58,6	53,9
4	77,5	74,7	69,1
5	94,7	90,4	84,8

Tabelle 12.

Elektronenzustand	$v$	$B_v^*$	$-D_v \cdot 10^5$
Normalzustand ${}^1\Sigma$	0	5,063	18,3
	1	4,914	19,1
	2	4,775	19,3
Erregter Zustand ${}^1\Pi$	0	5,181	19,1
	1	5,025	19,3
	2	4,872	22,0
" " ${}^1\Sigma^*$	0	5,214	20,0
	1	5,027	21,3
" " ${}^1\Sigma_y$	(0)	4,31	
	(1)	$\sim 4,20$	
" " ${}^1\Sigma_x$	(0)	$\sim 3,88$	

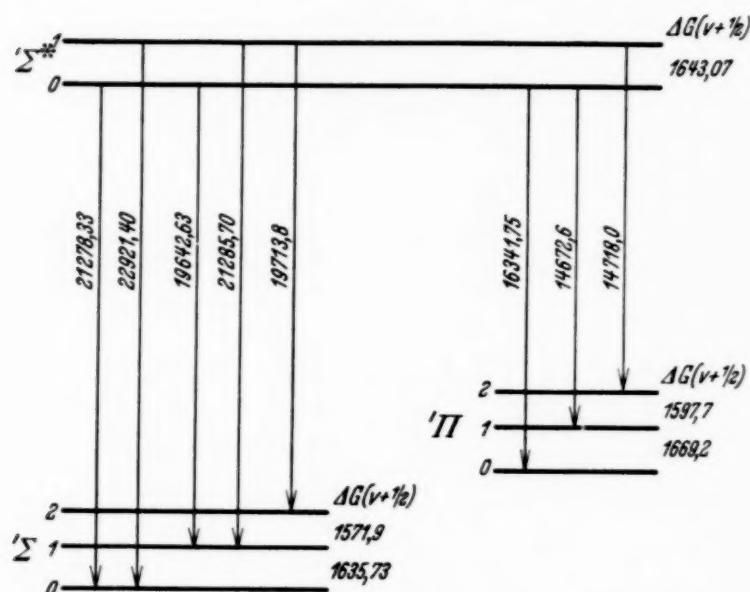


Fig. 2.

§ 5. Die Dissoziationswerte sind für den niederen  ${}^1\Sigma$ -Term und für den  ${}^1\Pi$ -Term berechnet, und die erhaltenen Werte sind  $21800$  bzw.  $20300\text{ cm}^{-1}$ , was darauf hindeutet, daß sie aus demselben Zustand des Wismutatoms stammen. Der Dissoziationswert des höheren  ${}^1\Sigma^*$ -Terms kann roh zu  $17000\text{ cm}^{-1}$  geschätzt werden. Die in dem unter Fußnote<sup>1)</sup>, S. 328 angeführten Bericht mitgeteilten Dissoziationswerte sind mit Verwendung unrichtiger  $\omega_e$ - und  $\omega_e x_e$ -Werte berechnet, weshalb sie durch die hier angegebenen Dissoziationswerte zu ersetzen sind. Die Dissoziationswerte sind nach der Gleichung  $D = G(v_{\max}) - G(0)$  berechnet, wobei  $v_{\max}$  aus  $\frac{dG}{dv} = 0$  erhalten ist. Die  $\omega_e$ -Werte und  $\omega_e x_e$ -Werte sind für den  ${}^1\Sigma^*$ -Zustand durch Verwendung der Formel von Birge:  $\frac{2x_e B_e}{\alpha_e} = 1,4$  ab-

geleitet. Dazu kommt, daß  $\nu_0$  beinahe mit der Atomlinie  $\lambda 4722$  zusammenfällt und daß die Konstanten des Bandensystems sowohl im Anfangszustand als auch im Endzustand nahe aneinander liegen. Man kann deshalb vermuten, daß die diesen Dissoziationsgrenzen entsprechenden Niveaus im Spektrum des Wismutatoms die Niveaus  $6s^2 p^3 2D$  ( $-47323, -43304$ ) und  $6s^2 p^2 7s$  ( $-26153$ ) sind. Dies steht auch in guter Übereinstimmung mit dem Hervortreten eines kleineren negativen Entkopplungsterms  $\varepsilon (J + \frac{1}{2})$  im Endzustand des BiH-Moleküls ( $\varepsilon = -0,0075$ ). Nach der Theorie kann man einen solchen Entkopplungsterm in Molekülternen, die aus  $P$ - und  $D$ -Termen im Atom stammen, erwarten. In die Tabellen 13 und 14 sind die Kernschwingungskonstanten und die Dissoziationswerte eingetragen.

Tabelle 13.

Elektronenzustand	$B_e^*$	$\alpha_e$	$\gamma_e$	$r_e \cdot 10^8 \text{ cm}$
Normalzustand ${}^1\Sigma$	5,141	0,159	0,005	1,811
Erregter Zustand ${}^1\Pi$	5,260	0,159	0,002	1,790
" " ${}^1\Sigma^*$	5,308	0,187	—	1,782
" " ${}^1\Sigma_y$	4,35	0,10	—	1,96
" " ${}^1\Sigma_x$	—	—	—	( $r_0 = 2,08$ )

Tabelle 14.

Elektronenzustand	$\nu_e$	$\omega_e$	$\nu_e \omega_e$	$D_{\text{cm}^{-1}}$
Normalzustand ${}^1\Sigma$	0	1699,5	31,9	21 800
Erregter Zustand ${}^1\Pi$	4 916,9	1740,7	35,8	20 300
" " ${}^1\Sigma^*$	21 266,7	$\sim 1728$	$\sim 42,6$	$\sim 17\ 000$
" " ${}^1\Sigma_y (0)$	$v_0 = x$	—	—	—
" " ${}^1\Sigma_y (1)$	$v_0 = x + 1313,6$	—	—	—
" " ${}^1\Sigma_x (0)$	$v_0 = x + 20\ 647$	—	—	—

§ 6. Hinsichtlich der Elektronenkonfiguration des Wismuthydrids ist die  $\lambda$ -Aufspaltung des  ${}^1\Pi$ -Zustandes nach der Theorie von van Vleck<sup>1)</sup> für den von ihm als „pure precession“ bezeichneten Fall untersucht. Die  $\lambda$ -Aufspaltung ist bestimmt worden durch:

$$\begin{aligned} [Q(J) - P(J+1)] - [P(J) - Q(J+1)] \\ = \Delta T_{de}(J) + \Delta T_{de}(J+1) \simeq 2 \Delta T_{de}(J + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

In die Tabelle 15 ist die  $\lambda$ -Aufspaltung des  ${}^1\Pi$ -Zustandes für die Kernschwingungszustände  $v = 0, 1$  und  $2$  eingetragen. Der  $\gamma$ -Wert in der Formel:

$$\Delta T_{de}(J) = \gamma J(J+1)$$

<sup>1)</sup> J. H. van Vleck, Phys. Rev. 33, 467, 1929.

ist mit Verwendung dieser Tabelle 15 graphisch bestimmt worden. Nach Mulliken und Christy<sup>1)</sup> wird der  $\lambda$ -Aufspaltungskoeffizient  $\gamma$  durch folgenden Ausdruck erhalten:

$$\gamma = \frac{2 B_v^2 l(l+1)}{\nu(\Pi\Sigma)},$$

wo  $B_v = B_v^* - \gamma$  ist;  $B_v^*$  ist dabei der spektroskopisch erhaltene  $B_v$ -Wert. Wenn angenommen wird, daß die Präzession von einem  $p$ -Elektron ( $l = 1$ ) verursacht wird, so werden die  $\gamma$ -Werte erhalten, die zusammen mit den auf experimentellem Wege gefundenen  $\gamma$ -Werten in der Tabelle 16 zusammengestellt sind.

Tabelle 15. Die  $\lambda$ -Aufspaltung in  ${}^1\Pi$ .

$J$	$2\Delta T_{dc}(J+\frac{1}{2})$			$J$	$2\Delta T_{de}(J+\frac{1}{2})$		
	$v=0$	$v=1$	$v=2$		$v=0$	$v=1$	$v=2$
1	(1,25)	(-0,2)	0	13	7,66	7,3	
2	0,64	0,5	0,3	14	8,62	8,5	
3	0,73	0,7	0,4	15	9,79	9,6	
4	1,03	1,1	0,7	16	11,08	10,7	
5	1,48	1,3	1,4	17	12,30	11,9	
6	2,02	1,5	1,9	18	13,90	13,4	
7	2,58	2,1	2,5	19	15,05	14,8	
8	3,23	3,0	3,0	20	16,47	15,8	
9	3,97	3,8	3,7	21		17,2	
10	4,79	4,6	4,7	22		18,9	
11	5,67	5,2	5,5	23		20,6	
12	6,62	6,3	6,1	24		21,9	

Tabelle 16.

	$v=0$	$v=1$	$v=2$
$\gamma_{\text{exp}}$	0,020	0,019	0,019
$\gamma_{\text{ber}}$	0,022	0,020	0,019

Aus der Tabelle geht hervor, daß die experimentellen Werte in guter Übereinstimmung mit den aus der Formel berechneten Werten sind.

Das Molekülspektrum des Wismutdeutrids ist gegenwärtig Gegenstand einer Untersuchung.

Herrn Prof. Dr. E. Hulthén, der zusammen mit mir die Untersuchung des Wismuthydrids angefangen hat, und der stets mit größtem Interesse dieser Untersuchung gefolgt ist, will ich hiermit meinen herzlichen Dank sagen.

Stockholm, Physikalisches Institut der Universität, April 1935.

<sup>1)</sup> R. S. Mulliken u. U. A. Christy, Phys. Rev. **38**, 87, 1931.

## Quaternionen, Semivektoren und Spinoren.

Von J. Blaton in Wilno.

(Eingegangen am 23. April 1935.)

Die Darstellung der Lorentz-Transformationen durch Quaternionen erlaubt es sehr einfach, die Theorie der Semivektoren und Spinoren zu entwickeln. Die Zerlegung der Semivektoren erster (zweiter) Art in zwei Spinoren erster (zweiter) Art entspricht dabei genau der Zerlegung der Quaternionen in zwei rechts- (links-) invariante Subalgebren. Diese Zerlegung wird durch idempotente Quaternionen vermittelt und ist von der Wahl zweier komplexer Parameter abhängig, welche im Raume der Semivektoren erster (zweiter) Art von den  $\infty^1$  invarianten Ebenen, die den Minimalkegel erzeugen, zwei festlegen.

Der Zusammenhang zwischen der von van der Waerden entwickelten Theorie der Spinoren<sup>1)</sup> und der von Einstein und Mayer<sup>2)</sup> eingeführten Semivektoren ist bereits Gegenstand einiger Untersuchungen gewesen<sup>3)</sup>. Auch der Zusammenhang zwischen Quaternionen und Semivektoren wurde bereits behandelt<sup>4)</sup>. Hier soll nun gezeigt werden, wie sich die ganze Theorie der *Semivektoren und Spinoren* einheitlich und ganz elementar aus der Quaternionenrechnung bei Heranziehung der idempotenten Quaternionen entwickeln lässt.

In § 1 werden allgemein die *Lorentz-Transformationen* erörtert. § 2 bringt die wesentlichsten Begriffe der *Quaternionenrechnung*, worauf in § 3 die *idempotenten Quaternionen* eingeführt werden und die durch sie mögliche *Zerlegung der Quaternionen* in zwei links- bzw. zwei rechtsinvariante Subalgebren entwickelt wird. Der an § 2 anknüpfende § 4 behandelt die bekannte *Darstellung* der Quaternionen durch Matrizen. In § 5 werden die in § 3 gefundenen Resultate in die Darstellungen übertragen und weiterentwickelt. § 6 bringt die *geometrische Deutung* dieser Resultate. In § 7 wird die *Darstellung der Lorentz-Transformationen* durch Quaternionen behandelt, und § 8 bringt die daraus folgende Theorie der *Semivektoren und Spinoren*.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Gruppe der *eigenlichen* Lorentz-Transformationen und wollen erst in einer nächsten Mitteilung

<sup>1)</sup> Vgl. O. Laporte u. G. Uhlenbeck, Phys. Rev. **37**, 1380, 1931. —

<sup>2)</sup> A. Einstein u. W. Mayer, Berl. Ber. 1932, S. 552. — <sup>3)</sup> J. A. Schouten, ZS. f. Phys. **84**, 92, 1933; V. Bargmann, Helv. Phys. Acta **7**, 57, 1934; J. Ullmo, Journ. de phys. **5**, 230, 1934. — <sup>4)</sup> W. Scherrer, Comment. Math. Helv. **7**, 141, 1935.

auf die Transformationseigenschaften der Semivektoren und Spinoren, bei den Transformationen der vollen Lorentz-Gruppe, von dem hier gewählten Standpunkte eingehen.

### § 1. Allgemeines über Lorentz-Transformationen.

Wir werden bei unseren Untersuchungen stets die Raumkoordinaten mit  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnen und statt der Zeit  $t$  die Minkowskische Variable  $x_4 = ict$  ( $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$ ) benutzen. Dies hat den Vorteil, daß die Lorentz-Transformationen (LT.) orthogonale Transformationen dieser vier Variablen werden und der Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Größen wegfällt.

Die Transformationen  $\mathfrak{L}$  der vollen Lorentz-Gruppe zerfallen in zwei Klassen: die Klasse der eigentlichen LT.  $\mathfrak{L}_0$ , d. h. der orthogonalen Transformationen der Variablen  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , deren Transformationsmatrix die Determinante  $+1$  hat, und die Klasse der uneigentlichen LT.  $\mathfrak{L}_1$ , von denen sich jede aus einer Spiegelung  $s$  der Raumkoordinaten:

$$s \quad x_1^s = -x_1, \quad x_2^s = -x_2, \quad x_3^s = -x_3, \quad x_4^s = x_4$$

und einer eigentlichen LT. zusammensetzen läßt. Die uneigentlichen LT. bilden im Gegensatz zu den eigentlichen LT. keine Gruppe, da die Zusammensetzung zweier uneigentlicher LT. stets eine eigentliche LT. ergibt.

Wir werden im folgenden die LT. als Vektorabbildungen im vierdimensionalen Raume  $R_4$  auffassen. Unter  $\{x\}$  bzw.  $[x]$  wollen wir die Matrix mit einer Spalte bzw. einer Zeile verstehen, die in den Zeilen bzw. Spalten die Komponenten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  des Vektors  $\hat{x}$  enthält. Dem Vektor  $\hat{x}$  wird durch eine LT. der Vektor  $\hat{x}'$  zugeordnet. Beim Übergang zu einem anderen, nicht notwendig orthogonalen Koordinatensystem wollen wir die neuen Komponenten von  $\hat{x}$  mit  $x_i^*$  bezeichnen.

Große lateinische Buchstaben bezeichnen im folgenden quadratische Matrizen. Weiterhin bedeutet  $\bar{A}$  die Matrix, deren Elemente konjugiert komplex zu denen der Matrix  $A$  sind,  $A^\times$  die zu  $A$  transponierte Matrix, die aus  $A$  durch Spiegelung an der Hauptdiagonale entsteht,  $\tilde{A}$  die zu  $A$  adjugierte (hermitisch konjugierte) Matrix,  $A^{-1}$  die zu  $A$  reziproke Matrix und  $|A|$  die Determinante der Matrix  $A$ .

Wir können dann die LT. in der Form

$$\{x'\} = L \{x\} \tag{1}$$

oder in der Form

$$[x'] = [x] L^\times$$

schreiben, wobei

$$L^\times = L^{-1} \tag{2}$$

ist, da die LT. orthogonal sind. Dabei ist

$$|L| = \pm 1, \quad (3)$$

wobei + oder — steht, je nachdem wir es mit einer eigentlichen oder un-eigentlichen LT. zu tun haben. Die Bedingung (2) und die daraus folgende (3) sind nicht die einzigen, denen die Matrix einer (eigentlichen oder uneigentlichen) LT.  $\mathfrak{L}$  unterworfen ist. Es sind noch die Realitätsverhältnisse zu beachten. In dem Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3, x_0 = ct$  muß nämlich die einer LT.  $\mathfrak{L}$  entsprechende Matrix *reell* sein: d. h. führen wir diese Koordinaten vermittelst

$$\{x^*\} = U \{x\}$$

ein, wo

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -i \end{pmatrix}$$

ist<sup>1)</sup>, so muß die auf diese Koordinaten bezogene Matrix der LT.  $\mathfrak{L}$

$$L^* = ULU^{-1}$$

reell sein, d. h. es muß

$$ULU^{-1} = \bar{U}\bar{L}\bar{U}^{-1}$$

sein. Das führt wegen

$$\bar{U} = U^{-1}, \quad U^2 = (U^2)^{-1} = G,$$

wo

$$-G = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}$$

die die Spiegelung  $\mathfrak{s}$  darstellende Matrix ist, auf die Gleichung

$$\bar{L} = GLG, \quad (4)$$

welche ausdrückt, daß die in der vierten Zeile und vierten Spalte stehenden Matrixelemente von  $L$  mit Ausnahme von  $l_{44}$  rein imaginär sind, während alle übrigen Matrixelemente reell sind<sup>2)</sup>. Wir müssen weiter von einer LT.  $\mathfrak{L}$  verlangen, daß sie die Zeitrichtung nicht umkehrt, was auf die Bedingung

$$l_{44} > 0 \quad (5)$$

<sup>1)</sup> Bei Diagonalmatrizen unterdrücken wir die außerhalb der Diagonale stehenden Nullen. — <sup>2)</sup>  $l_{ik}$  bedeutet das in der  $i$ -ten Zeile und  $k$ -ten Spalte stehende Element der Matrix  $L$ .

führt. Die Gleichungen (2), (4) und (5) erfassen bereits alle an  $L$  zu stellenden Bedingungen. Gleichung (4) kann auch als Aussage über die Spiegelung  $\mathfrak{s}$  gelten; sie drückt nämlich aus, daß die durch  $G$  dargestellte Spiegelung  $\mathfrak{s}$  dann und nur dann mit einer LT.  $\mathfrak{L}$  vertauschbar ist, wenn  $\mathfrak{L}$  in eine bloße Transformation der Raumkoordinaten ausartet. Wir beschränken uns aber in der vorliegenden Arbeit auf die eigentlichen LT.  $\mathfrak{L}_0$ , nehmen also außer (2), (4) und (5) noch

$$|L| = 1$$

an.

### § 2. Quaternionen.

Wir verstehen unter einer Quaternion  $\mathbf{a}$  eine vierkomponentige hyperkomplexe Zahl<sup>1)</sup>

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4,$$

deren Komponenten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  beliebige komplexe Zahlen sein können und deren Basisgrößen (Quaternioneneinheiten)  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$  die folgenden Multiplikationsregeln befolgen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = -\mathbf{e}_4, & \mathbf{e}_i \mathbf{e}_4 &= \mathbf{e}_4 \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3. \end{aligned} \right\} (6)$$

$\mathbf{e}_4$  ist dabei die Haupteinheit der Quaternionen. Unter der Summe zweier Quaternionen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  verstehen wir die Quaternion  $\mathbf{c}$ , deren Komponenten  $c_i$  durch  $a_i + b_i$  gegeben sind. Eine Zahl wird mit einer Quaternion multipliziert, indem alle Komponenten der Quaternion mit dieser Zahl multipliziert werden. Das Produkt zweier Quaternionen wird durch (6) und die distributiven Gesetze

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{ab} + \mathbf{ac}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc} \end{aligned} \right\} (7)$$

erklärt. Aus (6) und (7) folgt die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}.$$

Dagegen ist gemäß (6) das kommutative Gesetz für die Multiplikation zweier Quaternionen nicht mehr gültig.

Die zur Quaternion  $\mathbf{a}$  konjugierte Quaternion  $\check{\mathbf{a}}$  ist definiert durch

$$\check{\mathbf{a}} = -a_1 \mathbf{e}_1 - a_2 \mathbf{e}_2 - a_3 \mathbf{e}_3 + a_4 \mathbf{e}_4.$$

---

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. H. Rothe, Enc. Math. Wiss. III, AB 11, S. 1300.

Unter der zur Quaternion  $\mathbf{a}$  adjungierten Quaternion  $\tilde{\mathbf{a}}$  wollen wir die Quaternion  $\tilde{\mathbf{a}} = -\bar{a}_1 \mathbf{e}_1 - \bar{a}_2 \mathbf{e}_2 - \bar{a}_3 \mathbf{e}_3 + \bar{a}_4 \mathbf{e}_4$

verstehen, deren Komponenten konjugiert komplex zu denen von  $\mathbf{a}$  sind. Eine Quaternion, für welche  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$ , wollen wir selbstadjungiert nennen.

Diejenige Quaternion, deren Komponenten konjugiert komplex zu denen von  $\mathbf{a}$  sind, wollen wir mit  $\bar{\mathbf{a}}$  bezeichnen. Es ist also

$$\tilde{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}.$$

Eine Quaternion, für welche  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$ , nennen wir reell.

Unter der Norm  $\mathcal{N}\mathbf{a}$  einer Quaternion  $\mathbf{a}$  verstehen wir die (im allgemeinen komplexe Zahl)

$$\mathcal{N}\mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

Ist die Norm einer Quaternion  $\mathbf{a}$

$$\mathcal{N}\mathbf{a} = 1,$$

so nennen wir  $\mathbf{a}$  eine Einheitsquaternion. Ist für eine Quaternion  $\mathbf{a}$ :

$$\mathcal{N}\mathbf{a} = 0,$$

so nennen wir  $\mathbf{a}$  eine Nullquaternion<sup>1)</sup>.

Zu einer Quaternion  $\mathbf{a}$  läßt sich die reziproke Quaternion  $\mathbf{a}^{-1}$ , für welche

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = \mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{e}_4$$

gilt, dann und nur dann definieren, wenn  $\mathcal{N}\mathbf{a} \neq 0$  ist. Es gilt dann

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{N}\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}.$$

Die Norm des Produktes mehrerer Quaternionen ist gleich dem Produkt ihrer Normen. Ferner gilt die Gleichung

$$\overline{\mathbf{abc}} = \tilde{\mathbf{c}} \tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{a}} \quad (8)$$

Ebenso ist die zu dem Produkt mehrerer Quaternionen konjugierte Quaternion gleich dem Produkt der konjugierten Quaternionen in verkehrter Reihenfolge.

### § 3. Idempotente Quaternionen.

Wir wollen noch eine besondere Klasse von Quaternionen einführen, die idempotenten Quaternionen, welche die Eigenschaft haben, daß sie mit ihrem Quadrate übereinstimmen. Eine idempotente Quaternion  $\mathbf{e}$  ist also durch die Forderung

$$\mathbf{ee} = \mathbf{e}$$

<sup>1)</sup> Zu unterscheiden von der Quaternion 0, für welche  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  ist.

definiert<sup>1)</sup>). Mit Ausnahme der Haupteinheit  $e_4$  und der Quaternion 0 erfüllt diese Bedingung dann und nur dann eine Quaternion  $\epsilon$

$$\epsilon = \epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 + \epsilon_3 e_3 + \epsilon_4 e_4,$$

wenn

$$\mathcal{N}\epsilon = 0, \quad \epsilon_4 = \frac{1}{2},$$

also

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 = -\frac{1}{4}, \quad \epsilon_4 = \frac{1}{2} \quad (9)$$

ist. Wir werden im folgenden unter  $\epsilon$  immer eine von Null und  $e_4$  verschiedene idempotente Größe verstehen, also eine Nullquaternion, für welche (9) gilt. Mit  $\epsilon$  ist wegen (9) auch  $\check{\epsilon}$ ,  $\bar{\epsilon}$  und  $\tilde{\epsilon}$  idempotent. Insbesondere ist

$$\epsilon\check{\epsilon} = \check{\epsilon}\epsilon = 0 \quad (10)$$

und

$$\epsilon + \check{\epsilon} = e_4. \quad (11)$$

Man nennt zwei idempotente Größen, für welche (10) gilt, *unabhängig*. Wir können  $\epsilon$  gegenüber  $e_4$  als *primitive idempotente* Quaternion kennzeichnen, da sich  $\epsilon$  im Gegensatz zu  $e_4$  nicht mehr weiter in die Summe idempotenter und von Null verschiedener Quaternionen zerlegen lässt. Man beweist vermittelst (11) leicht, daß  $\check{\epsilon}$  die einzige primitive von  $\epsilon$  unabhängige Quaternion ist.

Gleichung (11) erlaubt für eine beliebige Quaternion  $a$  die folgende Zerlegung zu definieren:

$$a = a e_4 = a(\epsilon + \check{\epsilon}) = a\epsilon + a\check{\epsilon} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2, \quad (12)$$

wo

$$\underline{a}_1 = a\epsilon, \quad \underline{a}_2 = a\check{\epsilon}. \quad (12a)$$

Die Quaternionen  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  erfüllen dann die Gleichungen

$$\underline{a}_1 = \underline{a}_1\epsilon, \quad \underline{a}_2 = \underline{a}_2\check{\epsilon}.$$

Die Gesamtheit der Quaternionen  $\underline{x}$ , für welche (bei festem  $\epsilon$ )

$$\underline{x}\epsilon = \underline{x} \quad (13)$$

gilt, bildet eine linksinvariante Subalgebra  $P_1(\epsilon)$  innerhalb der Algebra der Quaternionen<sup>2)</sup>. Es gehört nämlich mit  $\underline{a}_1$  und  $\underline{b}_1$  auch

$$\underline{a}_1 + \underline{b}_1 = \underline{a}_1\epsilon + \underline{b}_1\epsilon = (\underline{a}_1 + \underline{b}_1)\epsilon \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. H. Weyl, Theory of Groups and Quantum Mechanics, London 1931, Kap. III, § 13, Kap. V, § 3. — <sup>2)</sup> Auch Linksideal genannt, vgl. z. B. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Berlin 1930.

zu dieser Gesamtheit, ferner mit  $\mathbf{a}_1$  auch  $c\mathbf{a}_1$  ( $c$  beliebige Zahl) und mit  $\mathbf{a}_1$  auch

$$\mathbf{z}\mathbf{a}_1 = \mathbf{z}\mathbf{a}_1 \epsilon, \quad (15)$$

wenn  $\mathbf{z}$  eine ganz beliebige Quaternion ist. Alle zu  $P_1(\epsilon)$  gehörigen Quaternionen können auch durch die zu (13) äquivalente Forderung:

$$\mathbf{x}_1 \epsilon = 0 \quad (16)$$

charakterisiert werden, da, falls letztere Gleichung gilt, auch gilt:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 e_4 = \mathbf{x}_1 (\epsilon + \check{\epsilon}) = \mathbf{x}_1 \epsilon + \mathbf{x}_1 \check{\epsilon} = \mathbf{x}_1 \epsilon.$$

Ebenso bildet die Gesamtheit der Quaternionen  $\mathbf{x}_2$ , für welche

$$\mathbf{x}_2 \epsilon = \mathbf{x}_2$$

ist, eine linksinvariante Subalgebra  $P_2(\epsilon)$ , für die zu den Gleichungen (14), (15) und (16) analoge Gleichungen gelten.

Da sich gemäß (12) jede Quaternion  $\mathbf{a}$  (für ein gegebenes  $\epsilon$ ) eindeutig in eine zu  $P_1(\epsilon)$  und eine zu  $P_2(\epsilon)$  gehörende Quaternion zerlegen lässt, so ist die Algebra der Quaternionen die Summe der beiden linksinvarianten Subalgebren  $P_1(\epsilon)$  und  $P_2(\epsilon)$ .  $\epsilon$  bzw.  $\check{\epsilon}$  spielen gemäß (13) bzw. (16) in den Subalgebren  $P_1(\epsilon)$  bzw.  $P_2(\epsilon)$  die Rolle der rechtsseitigen Einheit.

Wir können mittels einer idempotenten Größe  $\epsilon$  auch noch eine andere Zerlegung einer beliebigen Quaternion  $\mathbf{a}$  vornehmen, nämlich:

$$\mathbf{a} = e_4 \mathbf{a} = (\epsilon + \check{\epsilon}) \mathbf{a} = \epsilon \mathbf{a} + \check{\epsilon} \mathbf{a} = \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2, \quad (17)$$

wo

$$\mathbf{a}^1 = \epsilon \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^2 = \check{\epsilon} \mathbf{a}.$$

$\mathbf{a}^1$  und  $\mathbf{a}^2$  erfüllen jetzt die Gleichungen:

$$\epsilon \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^1, \quad \check{\epsilon} \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2.$$

Die Gesamtheit der Größen  $\mathbf{x}$ , für welche

$$\epsilon \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

gilt, bildet eine rechtsinvariante Subalgebra  $R_1(\epsilon)$  und man zeigt sogleich, daß mit  $\mathbf{a}^1$  und  $\mathbf{b}^1$  auch deren Summe und mit  $\mathbf{a}^1$  auch  $c\mathbf{a}^1$  zu  $R_1(\epsilon)$  gehört. Ist ferner  $\mathbf{z}$  eine beliebige Quaternion, so gehört mit  $\mathbf{a}^1$  auch  $\mathbf{a}^1 \mathbf{z}$  zu  $R_1(\epsilon)$ . Eine zweite rechtsinvariante Subalgebra  $R_2(\epsilon)$  wird durch die Gesamtheit der Quaternionen  $\mathbf{x}^2$  gebildet, für die

$$\check{\epsilon} \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^2$$

ist. Die Algebra der Quaternionen ist dann gemäß (17) wieder die Summe von  $R_1(\epsilon)$  und  $R_2(\epsilon)$ .

Jede einer rechts- bzw. linksinvarianten Subalgebra zugehörige Quaternion ist natürlich eine *Nullquaternion*, da  $\epsilon$  eine Nullquaternion ist.

#### § 4. Darstellung der Quaternionen durch zweireihige Matrizen.

Die Quaternionen lassen sich bekanntlich durch zweireihige Matrizen umkehrbar eindeutig darstellen, d. h. es läßt sich jeder Quaternion eine zweireihige Matrix so zuordnen, daß der Summe bzw. dem Produkte zweier Quaternionen die Summe bzw. das Produkt der zugeordneten Matrizen entspricht, und umgekehrt.

Den Basisgrößen  $e_i$  werden dabei die folgenden Matrizen zugeordnet<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} e_1 \rightarrow E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & e_2 \rightarrow E_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & e_3 \rightarrow E_3 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \\ e_4 \rightarrow E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Quaternion  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$

entspricht dann die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 + ia_3 & -a_2 + ia_1 \\ a_2 + ia_1 & a_4 - ia_3 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Umgekehrt entspricht einer beliebigen Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

eindeutig die Quaternion

$$b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4,$$

wo

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{i}{2}(b_{12} + b_{21}), & b_2 &= -\frac{1}{2}(b_{12} - b_{21}), \\ b_3 &= -\frac{i}{2}(b_{11} - b_{22}), & b_4 &= \frac{1}{2}(b_{11} + b_{22}). \end{aligned}$$

Diese Darstellung hat folgende Eigenschaften:

1. Die Norm der Quaternion  $a$  ist gleich der Determinante der ihr zugeordneten Matrix  $A$ ,
2. Die Spur der Matrix  $A$ ,  $\text{Sp } A$  ist gleich  $2a_4$ .
3. Ist die Matrix  $A$  der Quaternion  $a$  zugeordnet, so ist der adjungierten Quaternion  $\tilde{a}$  die zu  $A$  hermitisch konjugierte Matrix  $\tilde{A}$  zugeordnet.

---

<sup>1)</sup> Alle anderen möglichen Darstellungen durch zweireihige Matrizen gehen aus dieser durch Ähnlichkeitstransformationen hervor; in der benutzten Darstellung werden die Basisgrößen durch unitäre Matrizen dargestellt.

### § 5. Zerlegung der Quaternionen.

Aus den obigen Sätzen folgt, daß eine Matrix  $\mathcal{E}$  dann und nur dann eine primitive idempotente Quaternion  $\mathbf{\epsilon}$  darstellt, wenn

$$|\mathcal{E}| = 0, \quad \mathcal{S}\mathcal{P} \mathcal{E} = 1. \quad (19)$$

Die Matrixdarstellung erlaubt sehr einfach die Relationen anzugeben, denen die Komponenten einer Quaternion Genüge leisten, wenn diese Quaternion einer der beiden durch  $\mathbf{\epsilon}$  bestimmten links- bzw. rechtsinvarianten Subalgebren angehört. Gleichung (16) lautet in Matrixform<sup>1)</sup>:

$$\underset{1}{X} \check{\mathcal{E}} = 0$$

und führt auf die folgenden Gleichungen für die Elemente von  $\underset{1}{X}$ :

$$\frac{x_{12}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{21}}. \quad (20)$$

Ebenso erhalten wir für die  $P_2(\mathbf{\epsilon})$  gehörenden Quaternionen  $\underset{2}{x}$ :

$$\frac{x_{21}}{x_{22}} = \frac{x_{12}}{x_{11}} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}}. \quad (21)$$

Für die Komponenten einer  $R_1(\mathbf{\epsilon})$  gehörenden Quaternion  $\underset{1}{x}$  erhält man ähnliche Gleichungen:

$$\frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{12}} = \frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \quad (22)$$

und schließlich für die  $R_2(\mathbf{\epsilon})$  gehörenden Quaternionen  $\underset{2}{x}$ :

$$\frac{x_{21}}{x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{12}} = -\frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{22}}. \quad (23)$$

Die idempotente Quaternion  $\mathbf{\epsilon}$  wird bereits durch die beiden in (20) und (21) auftretenden Verhältnisse:

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{21}} = \frac{\varepsilon_4 - i\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + i\varepsilon_1} = \varphi, \quad -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{21}} = -\frac{\varepsilon_4 + i\varepsilon_3}{\varepsilon_2 + i\varepsilon_1} = \chi$$

eindeutig bestimmt, wobei die beiden Zahlen  $\varphi$  und  $\chi$  voneinander verschieden sein müssen<sup>2)</sup>. Fassen wir  $\varphi$  und  $\chi$  als Parameter von  $\mathbf{\epsilon}$  auf, so ergeben sich die Komponenten von  $\mathbf{\epsilon}$  zu

$$\varepsilon_1 = -\frac{i}{2} \frac{1-\varphi\chi}{\varphi-\chi}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \frac{1+\varphi\chi}{\varphi-\chi}, \quad \varepsilon_3 = \frac{i}{2} \frac{\varphi+\chi}{\varphi-\chi}, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2}. \quad (24)$$

<sup>1)</sup> Wobei wir unter  $\check{\mathcal{E}}$  die  $\mathbf{\epsilon}$  zugeordnete Matrix verstehen. — <sup>2)</sup> Wäre nämlich  $\varphi = \chi$ , so würde daraus  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$  folgen, was wegen (19) unmöglich ist.

Die Gleichungen (20) und (21) drücken aus, daß in den Matrizen  $\overset{1}{X}$  bzw.  $\overset{2}{X}$ , welche den Quaternionen  $\overset{1}{x}$  bzw.  $\overset{2}{x}$  zugeordnet sind, die zweite Spalte gleich dem  $\varphi$ -fachen bzw.  $\chi$ -fachen der ersten Spalte ist. Die Gleichungen (22) und (23) sagen dagegen aus, daß in den den Quaternionen  $\overset{1}{x}$  bzw.  $\overset{2}{x}$  zugeordneten Matrizen  $\overset{1}{X}$  bzw.  $\overset{2}{X}$  die erste Zeile gleich dem  $-\chi$ -fachen bzw.  $-\varphi$ -fachen der zweiten Zeile ist.

Der Zerlegung der Quaternion  $a$  in zwei linksinvarianten Subalgebren angehörende Quaternionen  $\overset{1}{a}$  und  $\overset{2}{a}$  entspricht hiermit die folgende Zerlegung der ihr zugeordneten Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \varphi \alpha_1 \\ \alpha_2, & \varphi \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_3, & \chi \alpha_3 \\ \alpha_4, & \chi \alpha_4 \end{pmatrix} = \overset{1}{A} + \overset{2}{A}. \quad (25)$$

woraus sich:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_{12} - \chi a_{11}}{\varphi - \chi} = \frac{i a_1 - a_2 - \chi(i a_3 + a_4)}{\varphi - \chi}, \\ \alpha_2 &= \frac{-\chi a_{21} + a_{22}}{\varphi - \chi} = \frac{-\chi(i a_1 + a_2) - i a_3 + a_4}{\varphi - \chi}, \\ \alpha_3 &= \frac{-a_{12} + \varphi a_{11}}{\varphi - \chi} = \frac{i a_1 + a_2 + \varphi(i a_3 + a_4)}{\varphi - \chi}, \\ \alpha_4 &= \frac{\varphi a_{21} - a_{22}}{\varphi - \chi} = \frac{\varphi(i a_1 + a_2) + i a_3 - a_4}{\varphi - \chi} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ergibt. Dies lautet in knapper Matrixform geschrieben:

$$\{\alpha\} = S \{a\}, \quad (27)$$

wo

$$S = \frac{1}{\varphi - \chi} \begin{pmatrix} i & -1 & -i\chi & -\chi \\ -i\chi & -\chi & -i & 1 \\ -i & 1 & i\varphi & \varphi \\ i\varphi & \varphi & i & -1 \end{pmatrix}. \quad (27a)$$

Für eine Quaternion  $a\epsilon = a$  ist dann nach (25)

$$\alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0 \quad (28)$$

und für eine Quaternion  $a\check{\epsilon} = a$  ist

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0. \quad (29)$$

Der Zerlegung einer Quaternion  $a$  in die  $R_1(\epsilon)$  und  $R_2(\epsilon)$  gehörenden Quaternionen  $\overset{1}{a}$  und  $\overset{2}{a}$  entspricht dann folgende Zerlegung von  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\chi\beta_1, & -\chi\beta_2 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varphi\beta_3, & -\varphi\beta_4 \\ \beta_3, & \beta_4 \end{pmatrix} = \overset{1}{A} + \overset{2}{A}, \quad (30)$$

aus welcher man auf ähnliche Weise

$$\{\beta\} = T \{a\} \quad (31)$$

erhält, wobei

$$T = \frac{1}{\varphi - \chi} \begin{pmatrix} i\varphi, & \varphi, & i, & 1 \\ i, & -1, & -i\varphi, & \varphi \\ -i\chi, & -\chi, & -i, & -1 \\ -i, & 1, & i\chi, & -\chi \end{pmatrix}. \quad (31a)$$

Für eine Quaternion  $\epsilon a = a$  ist nach (30)

$$\beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0 \quad (32)$$

und für eine Quaternion  $\check{\epsilon} a = a$  ist

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0. \quad (33)$$

### § 6. Geometrische Deutung der Spaltung.

Die erhaltenen Resultate lassen sich einfach ausdrücken, wenn wir uns einer geometrischen Ausdrucksweise bedienen. Wir betrachten zu dem Zwecke die Quaternion  $a$  als Vektor in einem vierdimensionalen Raum mit  $e_1, e_2, e_3, e_4$  als Basisvektoren. Das Produkt

$$a' = b a \quad (34)$$

können wir als Abbildung in diesem Raum betrachten, durch welche jeder Quaternion  $a$  eine andere Quaternion  $a'$  zugeordnet wird. Eine zweite Gruppe von Abbildungen  $a \rightarrow a''$  wird durch das Produkt

$$a'' = b a \quad (35)$$

induziert, und schließlich bilden die Abbildungen  $a \rightarrow a'''$

$$a''' = b a c$$

eine dritte Gruppe.

Die Gesamtheit der Nullquaternonen ist in diesem Raum ein dreidimensionales Gebilde, der Minimalkegel, dessen Gleichung

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 0$$

ist. Dieses Gebilde bleibt offenbar bei allen drei obigen Gruppen von Abbildungen invariant. Bei den Abbildungen (34) bzw. (35) bleiben aber auch noch andere Gebilde invariant, denen wir uns nun zuwenden wollen.

Die Gesamtheit der Quaternonen, für welche (13) gilt, liegt offensichtlich in einer Ebene, deren Gleichung (28) ist und die daher nach (26) schon durch den Parameter  $\varphi$  eindeutig bestimmt wird. Diese Ebene bleibt bei allen Abbildungen (34) invariant, da die Quaternion  $a'$  nach (15) in derselben Ebene liegt. Da der Parameter  $\varphi$  keinen Einschränkungen unterliegt, so gibt es eine einfach unendliche Schar von Ebenen, die bei den

Abbildungen (34) invariant bleiben und die sämtlich auf dem Minimalkegel liegen. Wir können jede solche Ebene *linksinvariant* nennen. Wir sehen auch umgekehrt, daß Gleichung (28) für jede Nullquaternion nur eine einzige Lösung  $\varphi$  hat; es läßt sich also durch jeden Punkt des Minimalkegels eine und nur eine linksinvariante Ebene legen<sup>1)</sup>.

Jede primitive idempotente Quaternion  $\epsilon$  legt nun *zwei* (notwendig voneinander verschiedene) *linksinvariante* Ebenen  $p_1$  und  $p_2$  fest, deren Gleichungen durch (28) bzw. (29) gegeben sind. Es hängt dabei  $p_1$  nur von dem Parameter  $\varphi$  und  $p_2$  nur von dem Parameter  $\chi$  ab. In der Ebene  $p_1$  liegen alle der linksinvarianten Subalgebra  $P_1(\epsilon)$  und in der Ebene  $p_2$  alle der linksinvarianten Subalgebra  $P_2(\epsilon)$  angehörenden Quaternionen. Jede Quaternion kann in die Summe zweier in verschiedenen linksinvarianten Ebenen liegender Quaternionen zerlegt werden.

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich für die Gruppe der Abbildungen (35) durchführen. Es gibt eine Schar von *rechtsinvarianten* [d. h. gegenüber den Abbildungen (35) invarianten] Ebenen, welche auf dem Minimalkegel liegen. Durch jeden Punkt des Minimalkegels läßt sich eine und nur eine rechtsinvariante Ebene legen<sup>2)</sup>. Jede primitive idempotente Quaternion legt *zwei rechtsinvariante Ebenen*  $r_1$  und  $r_2$  fest, in denen die den rechtsinvarianten Subalgebren  $R_1(\epsilon)$  und  $R_2(\epsilon)$  angehörenden Quaternionen liegen. Dabei ist  $r_1$  nach (32) schon eindeutig durch den Parameter  $\chi$  und  $r_2$  nach (33) durch den Parameter  $\varphi$  bestimmt.

Die Zerlegung der Quaternionen in zwei links- bzw. rechtsinvariante Subalgebren ist also mit der Zerlegung des von uns betrachteten Raumes in zwei irreduzible, gegenüber den Abbildungen (34) bzw. (35) invariante Teilräume äquivalent.

Wir kehren zu den Abbildungen (34) zurück und führen neue Basisvektoren  $\mathbf{l}_i$  so ein, daß  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  die Komponenten von  $\mathbf{a}$  in den neuen Koordinaten werden. Die Basisvektoren  $\mathbf{l}_i$  sind dann durch die Forderung

$$\sum_i a_i \mathbf{e}_i = \sum_i \alpha_i \mathbf{l}_i \quad (36)$$

eindeutig bestimmt. Es liegen  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  in der durch  $\varphi$  und  $\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$  in der durch  $\chi$  bestimmten linksinvarianten Ebene, und zwar ergibt sich aus (31), (31a) und (36):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= \frac{1}{2}[-\varphi(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_4 - i\mathbf{e}_3], \\ \mathbf{l}_2 &= \frac{1}{2}[\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_1 + \varphi(\mathbf{e}_4 + i\mathbf{e}_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

$\mathbf{l}_3$  und  $\mathbf{l}_4$  ergeben sich aus  $\mathbf{l}_1$  und  $\mathbf{l}_2$ , indem man  $\varphi$  durch  $\chi$  ersetzt.

<sup>1)</sup> Außer dem Punkt 0, 0, 0, 0, der allen invarianten Ebenen gemeinsam ist.

<sup>2)</sup> Diese Ebene ist natürlich immer verschieden von der durch diesen Punkt hindurchgehenden linksinvarianten Ebene.

Für die Komponenten  $\alpha_i$  gilt bei den Abbildungen (34) ein besonders einfaches Transformationsgesetz. Die Gleichung

$$\mathbf{a}' \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{b} \mathbf{a} \boldsymbol{\epsilon}$$

lautet in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1, & \varphi \alpha'_1 \\ \alpha'_2, & \varphi \alpha'_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1, & \varphi \alpha_1 \\ \alpha_2, & \varphi \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

(38) ist offenbar äquivalent mit

$$\begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}. \quad (39)$$

Ebenso ist

$$\begin{Bmatrix} \alpha'_3 \\ \alpha'_4 \end{Bmatrix} = B \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}.$$

Bei den Abbildungen (35) führen wir neue Basisvektoren  $\mathbf{r}_i$  so ein, daß  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  die Komponenten von  $\mathbf{a}$  im neuen Koordinatensystem werden. Aus (31) und (31a) folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{2} [\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_1 - \chi(\mathbf{e}_4 - i\mathbf{e}_3)], \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{2} [\chi(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_4 + i\mathbf{e}_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$\mathbf{r}_3$  und  $\mathbf{r}_4$  ergeben sich daraus, indem wir  $\chi$  durch  $\varphi$  in  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  ersetzen.

Für die Abbildung:

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a} \mathbf{b}$$

erhalten wir aus (30) das folgende Transformationsgesetz für die  $\beta_i$ :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \beta''_1 \\ \beta''_2 \end{Bmatrix} &= B^\times \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} \beta''_3 \\ \beta''_4 \end{Bmatrix} &= B^\times \begin{Bmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

### § 7. Darstellung der Lorentz-Transformationen durch Quaternionen.

Es ist wohlbekannt, daß sich die LT. durch Quaternionen darstellen lassen<sup>1)</sup>. Wir wollen dies kurz herleiten. Der Vierervektor  $\hat{x}$  läßt sich als Quaternion

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 + x_4 \mathbf{e}_4$$

auffassen; da  $x_1, x_2, x_3$  reell und  $x_4$  rein imaginär ist, so ist die Quaternion  $i\mathbf{x}$  selbstadjungiert. Sind ferner  $\bar{\mathbf{q}}_1$  und  $\mathbf{q}_2$  zwei beliebige Einheitsquaternionen, so stellt

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}_1 \mathbf{x} \mathbf{q}_2 \quad (42)$$

<sup>1)</sup> F. Klein, Phys. ZS. **12**, 17, 1911; L. Silberstein, Theory of Relativity, London 1924.

eine orthogonale, vierdimensionale Transformation dar, da:

$$\mathcal{N}y = \mathcal{N}x$$

ist. Damit aber (42) eine LT. darstellt, muß mit  $i\mathbf{x}$  auch  $i\mathbf{y}$  selbstadjungiert sein, also muß nach Gleichung (8):

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{x} \mathbf{q}_2 = \tilde{\mathbf{q}}_2 \mathbf{x} \tilde{\mathbf{q}}_1$$

sein. Man beweist leicht, daß diese Forderung auf die Gleichung

$$\mathbf{q}_2 = \pm \tilde{\mathbf{q}}_1$$

führt. Doch ist nur bei Verwendung des + -Zeichens die Forderung (5) erfüllt. Für LT. ist also

$$\mathbf{x}' = \mathbf{q} \mathbf{x} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (43)$$

Diese Transformationen sind immer eigentliche LT. Die Quaternion  $\mathbf{q}$  wird dabei durch die LT.  $\mathfrak{Q}_0$  bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt.

Gleichung (43) können wir sogleich in Matrixform umschreiben, indem wir der Einheitsquaternion  $\mathbf{q}$  die unimodulare Matrix  $Q$  und der Quaternion  $\mathbf{x}$  die Matrix  $X$  zuordnen. Es ist dann:

$$X' = Q X \tilde{Q}. \quad (44)$$

Die Elemente  $x'_{ik}$  von  $X'$  berechnen sich nach den Regeln der Matrizenmultiplikation zu

$$x'_{ik} = \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 q_{ir} \bar{q}_{ks} x_{rs}, \quad (45)$$

wobei nach (18)

$$x_{11} = x_4 + ix_3, \quad x_{12} = -x_2 + ix_1, \quad x_{21} = x_2 + ix_1, \quad x_{22} = x_4 - ix_3$$

ist.

Wir sehen, daß Linearkombinationen der Koordinaten (nämlich die  $x'_{ik}$ ) sich bei eigentlichen LT. wie tensorielle Gebilde zweiter Stufe in einer zweidimensionalen (komplexen) Mannigfaltigkeit transformieren. Die Frage nach den Tensoren erster Stufe in dieser Mannigfaltigkeit führt sogleich auf die Spinoren. Doch werden wir im nächsten Paragraphen zu den Spinoren auf eine natürlichere Weise gelangen.

Es ist bemerkenswert, daß sich aus der Darstellung (43) der LT. bereits alle in § 1 gestellten Bedingungen ohne jede Zusatzforderungen ergeben. Ist speziell  $\mathbf{q}$  eine reelle Einheitsquaternion, also  $Q$  eine unitäre Matrix, so stellt (44) eine Ähnlichkeitstransformation dar, bei der auch die Spur von  $X$ , also  $x_4$ , invariant bleibt; (43) stellt also in diesem Falle eine Raumdrehung dar.

*§ 8. Die Semivektoren und die Spinoren.*

Die Gleichung (43) legt die Einführung zweier Arten von Quaternonen nahe, die sich bei dieser LT. nach folgendem Schema transformieren:

$$\underline{\underline{u}}' = \underline{\underline{u}} \tilde{\underline{q}}, \quad (46)$$

$$\underline{\underline{v}}' = \underline{\underline{q}} \underline{\underline{v}}, \quad (47)$$

wobei wir einen bzw. zwei Striche unter eine Quaternion setzen, je nachdem sie sich nach (46) bzw. (47) transformiert. Eine Quaternion, die sich nach (46) bzw. (47) transformiert, nennen wir eine *Semiquaternion erster bzw. zweiter Art*.

Wir haben die Transformationen (46) und (47) im wesentlichen schon in § 6 behandelt und können uns daher kurz fassen. Da  $\underline{\underline{q}}$  eine Einheitsquaternion ist, so sind die Transformationen (46) und (47) orthogonal. Es ist also bei LT. die *Norm* einer Semiquaternion erster sowie zweiter Art eine Invariante, und ferner ist für zwei Semiquaternonen  $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}$  erster Art die *Quaternion*

$$\underline{\underline{w}} = \underline{\underline{u}} \check{\underline{\underline{v}}} \quad (48)$$

eine *Invariante* bei LT. und für zwei Semiquaternonen  $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}$  zweiter Art die *Quaternion*

$$\underline{s} = \check{\underline{\underline{u}}} \underline{\underline{v}} \quad (49)$$

eine *Invariante*. Ferner ist die zu einer Semiquaternion erster Art *adjungierte* Quaternion eine Semiquaternion zweiter Art, und umgekehrt; denn wenn

$$\underline{\underline{u}}' = \underline{\underline{u}} \tilde{\underline{q}}$$

ist, so wird nach (8)

$$\tilde{\underline{\underline{u}}}' = \underline{\underline{q}} \tilde{\underline{\underline{u}}}.$$

Das Produkt einer Semiquaternion zweiter Art mit einer Semiquaternion erster Art

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{v}} \underline{\underline{u}}$$

(auf die Reihenfolge zu achten!)

transformiert sich wie die Ortsquaternion  $\underline{x}$ , bildet also einen Vierervektor.

Den Raum der Semiquaternonen erster bzw. zweiter Art können wir mit dem in § 6 eingeführten Raume *identifizieren*, wenn wir darin *nur* die Transformationen (35) bzw. *nur* die Transformationen (34) zulassen und sie außerdem durch die Forderung der Orthogonalität einschränken. Wird eine Semiquaternion in diesem Raume als Vektor aufgefaßt, so nennen wir sie einen *Semivektor* erster bzw. zweiter Art. In dem nun betrachteten Raume der Semivektoren erster bzw. zweiter Art *gibt es nach § 6 je eine Schar*

von  $\infty^1$  invarianten Ebenen, die den Minimalkegel erzeugen. Die rechts-invarianten Ebenen des § 6 sind jetzt die invarianten Ebenen im Raume der Semivektoren erster Art, und die linksinvarianten Ebenen sind die invarianten Ebenen im Raume der Semivektoren zweiter Art.

Wir können jeden Semivektor erster (zweiter) Art in zwei spezielle Semivektoren erster (zweiter) Art zerlegen, von denen jeder in einer invarianten Ebene liegt. Diese Zerlegung lässt sich einfach mit Hilfe einer primitiven idempotenten Quaternion  $\epsilon$  nach der Formel

$$\underline{u} = \epsilon \underline{u} + \check{\epsilon} \underline{u}$$

für die Semivektoren erster Art, und der Formel

$$\underline{v} = \underline{v} \epsilon + \underline{v} \check{\epsilon}$$

für die Semivektoren zweiter Art durchführen.

Die in einer invarianten Ebene liegenden Semivektoren erster (zweiter) Art werden Spinoren erster (zweiter) Art genannt. Sie haben also nur zwei unabhängige Komponenten. Jeder Semivektor erster (zweiter) Art kann in zwei Spinoren erster (zweiter) Art zerlegt werden; diese Zerlegung hängt aber noch von der Wahl zweier komplexer Parameter ab, die die Ebenen, in welchen diese Spinoren liegen, bestimmen.

Die Transformationseigenschaften der Spinoren erster (zweiter) Art werden besonders einfach, wenn wir neue, von der Wahl der invarianten Ebene abhängige Basisvektoren einführen. Führen wir diese in derselben Weise wie in § 6 vermittels (40) bzw. (37) ein und bezeichnen wir die Komponenten des Spinors erster (zweiter) Art in diesen neuen Koordinaten mit  $\xi_1, \xi_2 (\eta_1, \eta_2)$ , so erhalten wir sofort nach Gleichung (41) für die Spinoren erster Art:

$$\begin{Bmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{Bmatrix} = \bar{Q} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix}$$

und nach Gleichung (39) für die Spinoren zweiter Art:

$$\begin{Bmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \end{Bmatrix} = Q \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix},$$

wo  $Q$  die die Quaternion  $q$  darstellende Matrix ist. Die Spinoren zweiter Art transformieren sich also konjugiert komplex zu den Spinoren erster Art.

Definiert man die Spinoren ausgehend von Gleichung (45) des vorigen Paragraphen, so geht der individuelle Charakter der invarianten Ebenen, in welchen diese Spinoren liegen, verloren; bei Einführung von der invarianten Ebene angepassten Basisvektoren ist ja die Transformationsmatrix gleich  $\bar{Q}(Q)$ , also unabhängig von dem diese Ebene bestimmenden

Parameter. Dieser Parameter bleibt selbst natürlich bei eigentlichen LT. invariant, wegen der Invarianz der von ihm bestimmten Ebene.

Wir bemerken noch, daß für zwei in einer invarianten Ebene liegende Semivektoren erster bzw. zweiter Art die nach (48) invariante Quaternion

$$\mathbf{w} = \underline{\mathbf{u}} \check{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{u}} \mathbf{\epsilon} \check{\mathbf{\epsilon}} \check{\underline{\mathbf{v}}} = 0$$

bzw. die nach (49) invariante Quaternion

$$\mathbf{s} = \check{\underline{\mathbf{u}}} \underline{\mathbf{v}} = \check{\underline{\mathbf{u}}} \check{\mathbf{\epsilon}} \mathbf{\epsilon} \underline{\mathbf{v}} = 0$$

stets verschwinden muß, also insbesondere das Skalarprodukt zweier in derselben invarianten Ebene liegender Semivektoren erster bzw. zweiter Art stets verschwindet<sup>1)</sup>.

Es kann manchmal vorteilhaft sein, die Zerlegung der Semivektoren so auszuführen, daß die beiden invarianten Ebenen  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ ), in welche der Raum der Semivektoren erster (zweiter) Art aufgespalten wird, zueinander *unitär orthogonal* sind, d. h. daß für jeden beliebigen in  $\mathbf{r}_1$  ( $\mathbf{p}_1$ ) liegenden Semivektor erster (zweiter) Art  $\overset{1}{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$  und für jeden beliebigen in  $\mathbf{r}_2$  ( $\mathbf{p}_2$ ) liegenden Semivektor erster (zweiter) Art  $\overset{2}{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$  die Gleichung

$$\overset{1}{u}_1 \bar{\overset{2}{u}}_1 + \overset{1}{u}_2 \bar{\overset{2}{u}}_2 + \overset{1}{u}_3 \bar{\overset{2}{u}}_3 + \overset{1}{u}_4 \bar{\overset{2}{u}}_4 = 0, \quad (50)$$

bzw. die Gleichung:

$$\overset{1}{v}_1 \bar{\overset{2}{v}}_1 + \overset{1}{v}_2 \bar{\overset{2}{v}}_2 + \overset{1}{v}_3 \bar{\overset{2}{v}}_3 + \overset{1}{v}_4 \bar{\overset{2}{v}}_4 = 0 \quad (51)$$

gilt. Wegen:

$$\overset{1}{\mathbf{u}} = \mathbf{\epsilon} \overset{1}{\mathbf{u}}, \quad \overset{2}{\mathbf{u}} = \check{\mathbf{\epsilon}} \overset{2}{\mathbf{u}}; \quad (\overset{1}{\mathbf{v}} = \overset{1}{\mathbf{v}} \mathbf{\epsilon}, \quad \overset{2}{\mathbf{v}} = \overset{2}{\mathbf{v}} \check{\mathbf{\epsilon}})$$

läßt sich (50) bzw. (51) dann und nur dann erfüllen, wenn

$$\bar{\mathbf{\epsilon}} \mathbf{\epsilon} = \mathbf{\epsilon} \bar{\mathbf{\epsilon}} = 0 \quad (52)$$

ist. Da aber  $\mathbf{\epsilon}$  immer zugleich mit  $\mathbf{\epsilon}$  idempotent ist und die einzige primitive idempotente Quaternion, für welche (52) gilt,  $\check{\mathbf{\epsilon}}$  ist, so muß

$$\bar{\mathbf{\epsilon}} = \mathbf{\epsilon}$$

sein, also muß  $\mathbf{\epsilon}$  selbstadjungiert sein. Da  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  dann rein imaginär sind, so folgt aus Gleichung (24):

$$\varphi \bar{\chi} = -1.$$

Wir erhalten dann für die Komponenten von  $\mathbf{\epsilon}$  die einfachen Formeln:

$$\varepsilon_1 = -\frac{i}{2} \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{1 + \varphi \bar{\varphi}}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{1 + \varphi \bar{\varphi}}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{i}{2} \frac{1 - \varphi \bar{\varphi}}{1 + \varphi \bar{\varphi}}, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{2}.$$

<sup>1)</sup> Die vierte Komponente des Produktes  $\mathbf{u} \check{\mathbf{v}}$  ist nämlich das Skalarprodukt der Semivektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ .

Zusammenfassend können wir sagen: Die Zerlegung der Semivektoren erster bzw. zweiter Art in zwei Spinoren erster bzw. zweiter Art entspricht genau der Zerlegung der Quaternionen in zwei rechts- bzw. linksinvariante Subalgebren. Jede der  $\infty^1$  invarianten Ebenen im Raume der Semivektoren erster bzw. zweiter Art kann in ihm als Ebene der Spinoren erster bzw. zweiter Art aufgefaßt werden. Die große Einfachheit aller Formeln, wenn man sie durch Quaternionen ausdrückt, läßt die letzteren als geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung der Semivektoren und Spinoren erscheinen.

An dieser Stelle sei auch dem *Fundusz Kultury Narodowej* herzlichst gedankt für die Ermöglichung der Ausführung dieser Arbeit durch Gewährung eines Stipendiums.

*Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen habe ich gefunden, daß man vermittelst der Quaternionen sehr einfach eine Wellengleichung aufstellen kann, die bei den Transformationen der vollen Lorentz-Gruppe invariant ist. Sie lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \tilde{\psi} \mathbf{a} &= \varphi \mathbf{b}, \\ \mathbf{d} \varphi \mathbf{a} &= \tilde{\psi} \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (53)$$

wo  $\psi$  ein Semivektor erster Art und  $\varphi$  ein Semivektor zweiter Art ist;  $\mathbf{d}$  bedeutet die Quaternion, deren Komponenten  $d_i$  durch

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - i \varepsilon \Phi_i$$

gegeben sind, die  $\Phi_i$  sind dabei die Komponenten des Viererpotentials.  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind beliebige konstante Quaternionen, die nur der Forderung:

$$\mathbf{a} = -\tilde{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{b} = -\tilde{\mathbf{b}}$$

unterliegen. Der Viererstrom

$$\mathbf{I} = \tilde{\psi} \tilde{\mathbf{a}} \psi + \varphi \mathbf{a} \tilde{\varphi}$$

ist dann divergenzfrei.

Das Gleichungssystem (53) zeigt sich als im wesentlichen identisch mit demjenigen von Einstein und Mayer<sup>1)</sup>, welches bekanntlich die Existenz zweier Elementarteilchen mit verschiedenen Massen erklärt. In der Quaternionengestalt (53) läßt sich die Diskussion dieses Gleichungssystems aber viel einfacher durchführen wie in einer demnächst an dieser Stelle erscheinenden Arbeit gezeigt werden soll.

<sup>1)</sup> Proc. Kon. Ak. v. Wet. Amsterdam **36**, 497, 1933.

## Kristallstruktur und elektrische Eigenschaften. VI.

### Die acht elektrischen Hauptleitfähigkeiten des Bi-Einkristalls im Magnetfeld.

Von **O. Stierstadt** in Berlin.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 4. Mai 1935.)

Es werden die acht „Parameter der magnetischen Widerstandsänderung“ für den Wismutkristall besprochen und die Berechtigung der Kohlerschen Ansätze für ihre Ableitung in schwachen Magnetfeldern nachgewiesen. Auf die Bedeutung dieser Parameter für Leitfähigkeitsfragen am Kristall wird hingewiesen, besonders auf ihre Wichtigkeit bei der Diskussion der Anisotropie elektrischer Leitfähigkeiten eines Kristallgitters im Magnetfeld.

#### I. Einleitung.

In der Elektronentheorie der Metalle ließ sich das Auftreten einer Reihe anomaler, elektrisch-magnetischer Effekte (z. B. anomaler Hall-Effekt, Größe der Widerstandsänderung im Magnetfeld u. a.) nicht einwandfrei erklären, solange man lediglich mit der Vorstellung freier Elektronen arbeitete. Erst mit Hilfe spezieller wellenmechanischer Vorstellungen gelang es Sommerfeld und Franck, Peierls und weiterhin Blochinzew und Nordheim<sup>1)</sup>, ein wenigstens qualitatives Verständnis dieser Erscheinungen zu erreichen, indem sie gewisse Besonderheiten der Elektronenbewegung und -energieverteilung im periodischen Kraftfeld eines Kristallgitters berücksichtigten. Jedoch liefert auch diese Behandlung nur ein Bild sehr qualitativer Art; eine explizite Lösung der Fundamentalgleichung für die Elektronenbewegung in einem Kristallgitter erscheint in der wellenmechanischen Behandlung wegen ganz besonderer mathematischer Schwierigkeiten für irreguläre Kristalle im allgemeinen kaum noch möglich.

Diesen theoretischen Versuchen steht die Fülle des experimentellen Materials über das Verhalten der elektrischen Leitfähigkeit eines Kristallgitters bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes gegenüber<sup>2)</sup>. Es zeigt sich, daß hier die mögliche Erscheinungsmannigfaltigkeit diejenige der Elastizitätstheorie in Kristallen bei weitem übertrifft. Daher macht sich auch das Fehlen des allgemeinen theoretischen Rahmens, in den sich die experimentellen Ergebnisse einfügen lassen, hier besonders unangenehm

<sup>1)</sup> D. Blochinzew u. L. Nordheim, ZS. f. Phys. **84**, 168, 1933. —

<sup>2)</sup> L. Schubnikow u. W. J. de Haas, Comm. Leiden 210; O. Stierstadt, I: ZS. f. Phys. **80**, 636, 1933; II: ebenda **85**, 310, 1933; III: ebenda **85**, 697, 1933; IV: ebenda **87**, 687, 1934; V: ebenda **93**, 676, 1935.

bemerkbar. Zwar kann man — und so wurde bisher fast ausschließlich verfahren — die Ergebnisse nach kristallographischen Gesichtspunkten ordnen. Dabei erhält man aber keine *exakte* Antwort auf die Frage nach Anzahl und Richtung der Hauptleitfähigkeiten, welche ein Kristallgitter im Magnetfeld bezüglich seiner Elektronenleitung charakterisieren. Das ist aber gerade die Frage: *Wieviele und welche Richtungen bzw. Werte der Leitfähigkeit sind bei Anwesenheit eines Magnetfeldes notwendig und hinreichend, um ein Kristallgitter elektrisch vollkommen zu definieren?*

Wegen der erwähnten Schwierigkeiten, die einer elektronentheoretischen Behandlung dieses Problems im Wege stehen, hat es nun M. Kohler<sup>1)</sup> unternommen, zunächst rein formal festzustellen, welche Arten von Orientierungsabhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung überhaupt mit den Kristallsymmetrien verträglich sind. Er geht dabei ganz im Sinne der Voigtschen<sup>2)</sup> Behandlungsweise kristallphysikalischer Probleme vor und stellt an den Beginn seiner Untersuchung die beiden folgenden experimentell gut gesicherten Annahmen:

1. Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes im Magnetfeld,
2. Widerstandsänderung proportional zum Quadrat der magnetischen Feldstärke (gültig für kleine Felder).

Unter diesen Bedingungen entwickelt er für sämtliche Kristallsysteme die Parameter der elektrischen Leitfähigkeit, welche zur Charakterisierung eines Kristallgitters im Magnetfeld notwendig und hinreichend sind.

### *II. Die Parameter der magnetischen Widerstandsänderung des Bi-Einkristalls.*

Kohler benutzt zur Formulierung der Bedingung (1) die verallgemeinerte Form des Ohmschen Gesetzes:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Um eine Widerstandsänderung zu bekommen, welche proportional zum Quadrat der magnetischen Feldstärke ist, wird Gleichung (1) im Magnetfeld wie folgt verallgemeinert:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \sum_{k,l,m=1}^3 R_{iklm} J_k H_l H_m \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Hier stellt der zweite Summand die durch das Magnetfeld hervorgerufene Widerstandsänderung dar, und der Tensor  $R_{iklm}$  ist für ihre Größe maß-

---

<sup>1)</sup> M. Kohler, Ann. d. Phys. (5) **20**, 891, 1934. — <sup>2)</sup> W. Voigt, Kristallphysik.

gebend. Wir wollen die Komponenten dieses Tensors  $R$  die „Parameter der magnetischen Widerstandsänderung“ nennen. Indem Kohler diesen Tensor den Kristallsymmetrien anpaßt, findet er für das im trigonalen System kristallisierende Wismut, daß die folgenden acht voneinander unabhängigen Komponenten seine Widerstandsänderungen im Magnetfeld definieren (wir unterteilen sie gleich in die drei charakteristischen Gruppen):

$$\text{Gruppe I:} \quad \begin{aligned} 1. \quad & R_{3333}, \\ 2. \quad & R_{1111} = R_{2222}. \end{aligned}$$

$$\text{Gruppe II:} \quad \begin{aligned} 3. \quad & R_{3311} = R_{3322}, \\ 4. \quad & R_{1133} = R_{2233}, \\ 5. \quad & R_{1122} = R_{2211}. \end{aligned}$$

$$\text{Gruppe III:} \quad \begin{aligned} 6. \quad & R_{3211} = -R_{3222} = R_{3121}, \\ 7. \quad & R_{1123} = -R_{2223} = R_{2113}, \\ 8. \quad & R_{3113} = R_{3223}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Indizierung sei darauf hingewiesen, daß nach den Gleichungen (1) und (2) die beiden ersten Indizes ( $i, k$ ) die Komponenten von Strom und Spannung, die beiden letzten Indizes ( $l, m$ ) die Komponenten des Magnetfeldes darstellen. Kristallographisch gibt der Index 3 stets die Richtung der Hauptachse (111-Achse) des Kristalls an, der Index 1 die Richtung einer Nebenachse; Index 2 steht senkrecht dazu. Wir werden die Richtungen gelegentlich mit  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnen. Der Zusammenhang dieser Richtungen mit den von uns früher gewählten Bezeichnungen für die verschiedenen Kristalltypen (siehe oben, l. c.) ergibt sich folgendermaßen:

Kristallstab in Richtung 1 gewachsen =  $P_1^{\parallel}$ -Kristall,  
 Kristallstab in Richtung 2 gewachsen =  $P_1^{\perp}$ -Kristall,  
 Kristallstab in Richtung 3 gewachsen =  $P_3$ -Kristall.

In ähnlicher Weise wie man im Fall  $H$  (Magnetfeld) = 0 beim Bi-Kristall angeben kann, daß die beiden Richtungen parallel und senkrecht zur Hauptachse seine Leitfähigkeit vollkommen definieren, wollen wir versuchen, an Hand der obigen acht Parameter ein Bild davon zu bekommen, welche Orientierungsmöglichkeiten jetzt, d. h. mit Magnetfeld, die charakteristischen sind.

*Gruppe I* ist zunächst sehr leicht zu diskutieren. In ihr sind die vier Indizes der auftretenden Parameter  $R$  jeweils alle einander gleich, d. h. Strom- und Feldkomponenten liegen in der gleichen Richtung: Wir haben in Gruppe I die Fälle der Widerstandsänderung bei *longitudinaler Mag-*

*netisierung* vor uns, und zwar in I, 1 für die kristallographische Hauptachse ( $P_3$ -Kristall), in I, 2 für die *Ebene* der kristallographischen Nebenachsen ( $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristalle). Diese beiden Fälle — I, 1 und I, 2, d. h. parallel und senkrecht zur Hauptachse — sind im Längsfeld also ebenso notwendig und hinreichend zur Charakterisierung der Leitfähigkeiten des Kristalls wie im Falle  $H = 0$  (siehe oben). *Das Längsfeld bringt also hier gegenüber dem feldfreien Fall noch keine größere Mannigfaltigkeit!* Allerdings gelten diese Überlegungen nur für ein  $H^2$ -Gesetz (siehe oben, Bedingung 2). Weicht die Widerstandsänderung bei höheren Feldern von diesem Gesetz ab, so sind die Kohlerschen Ergebnisse nicht mehr streng gültig. Vor allem gilt nicht mehr das, was unter den neuen Bedingungen der Gleichung (I, 2):  $R_{1111} = R_{2222}$  entsprechen würde, nämlich die Gleichheit der longitudinalen Widerstandsänderung parallel und senkrecht zu einer Nebenachse ( $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristalle). Es ergaben schon früher die Experimente [Kristallstruktur und elektrische Eigenschaften, III. Teil<sup>1</sup>], daß in der Ebene der drei Nebenachsen des Bi-Kristalls auch bei longitudinalem Magnetfeld eine elektrische Sechszähligkeit bestehen kann, je nachdem ob die Strom- und Feldrichtung parallel oder senkrecht zu einer Nebenachse steht ( $P_1^{\parallel}$  und  $P_1^{\perp}$ ). Die dafür vorliegenden Messungen gehen von  $H = 2000$  bis  $6000$  AW/cm und zeigen auch bei der kleinsten Feldstärke ( $H = 2000$  AW/cm) noch deutlich eine Sechszähligkeit. Wenn man nun die Annahme macht, daß eine strenge Gültigkeit des  $H^2$ -Gesetzes bei  $H = 2000$  AW/cm bereits nicht mehr besteht, was nach den Messungen in der Tat berechtigt ist [vgl. Kristallstruktur und elektrische Eigenschaften I<sup>2</sup>], so könnte die Kohlersche Gleichung (I, 2) unter Umständen bei kleineren Feldern noch Gültigkeit besitzen. Um das zu entscheiden, diene Fig. 1. Hier ist als Funktion des Magnetfeldes  $H$  die Stärke der Widerstandsschwankung  $S$ , welche die in Frage stehende Sechszähligkeit bedingt, aufgetragen worden ( $S$  in willkürlichen Einheiten). Die Größe dieser Schwankung nimmt mit abnehmender Feldstärke  $H$  sehr schnell ab. Wegen des flachen Verlaufs der Kurve in der Umgebung des Nullpunktes ist es indessen nicht mit Sicherheit zu entscheiden, ob für die Schwankung der Wert  $S = 0$  schon bei endlichem  $H$  auftritt oder erst bei  $H = 0$ , obwohl das erstere durchaus den Anschein hat. Hier liegen hinreichend exakte Messungen an *orientierten* Einkristallen in *kleinen* Feldern noch nicht genügend vor. Indessen zeigt Fig. 2, daß man mit ziemlicher Sicherheit die Annahme  $S = 0$  bei kleinen  $H \neq 0$  machen kann. In Fig. 2 sind die

<sup>1)</sup> O. Stierstadt, l. e., Fig. 5 und 6. — <sup>2)</sup> O. Stierstadt, l. e., z. B. Fig. 7b.

Widerstandsänderungen  $d\omega/\omega$  als Funktion der Feldstärke  $H$  aufgetragen, und zwar für die longitudinalen Widerstandsänderungen der  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristalle, welche nach Gleichung (I, 2) einander gleich sein sollen. Man sieht, daß dies für hohe Feldstärken sicher nicht der Fall ist; hier gilt auch das  $H^2$ -Gesetz nicht mehr, sondern bereits ein  $H$ -Gesetz. Bei kleinen Feldstärken aber, wo das  $H^2$ -Gesetz zur Gültigkeit gelangt, laufen die beiden

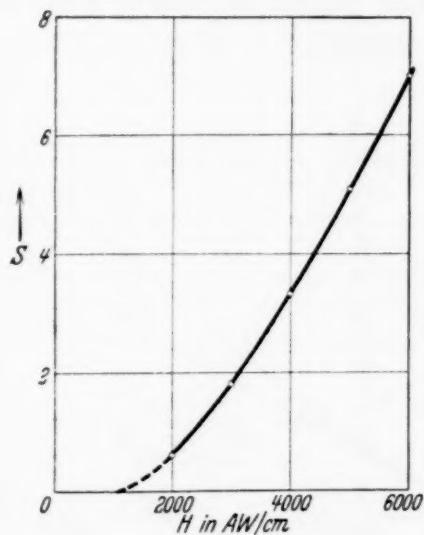


Fig. 1.

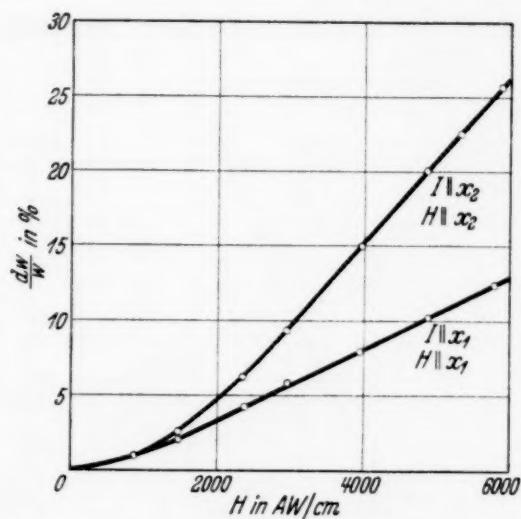


Fig. 2.

Kurven mehr und mehr zusammen und vereinigen sich bei  $H \sim 1000$  AW/cm völlig. Es erscheint danach die Kohlersche Gleichung (I, 2) unter den vorausgesetzten Annahmen experimentell durchaus bestätigt.

Wenden wir uns jetzt zunächst der Diskussion der *Gruppe II* zu. Hier sind jeweils die beiden ersten Indizes (Stromspannung) und die beiden letzten (Feldkomponenten) einander gleich, wir haben also Fälle *transversaler Magnetisierung* vor uns. Gleich der erste Term (II, 3),  $R_{3311} = R_{3322}$ , gibt die Widerstandsänderung in der kristallographischen Hauptachse an ( $P_3$ -Kristalle), wenn das Magnetfeld in der Ebene der Nebenachsen verläuft. Das Gleichheitszeichen besagt wieder: *Gleichwertigkeit* der Richtungen 1 und 2, d. h. parallel und senkrecht zu den Nebenachsen. Die experimentellen Ergebnisse zeigten hingegen gerade bei dieser Orientierung erstmalig die *Ungleichwertigkeit* der beiden fraglichen Richtungen [Kristallstruktur und elektrische Eigenschaften II<sup>1</sup>]. Es war gerade eines der hervorstechendsten Ergebnisse neuerer Arbeiten über die magnetische Widerstandsänderung des Bi-Einkristalls (siehe oben, l. c.), daß der Strom in der Hauptachse mit einer sechsfachen Periodizität schwankt, wenn das Magnetfeld

<sup>1)</sup> O. Stierstadt, l. c., Fig. 15.

in einer dazu senkrechten Ebene rotiert! Die Stärke dieser Schwankung nimmt allerdings mit abnehmendem Felde schnell ab und wurde nur in starken Magnetfeldern bis herab zu  $H = 6000 \text{ AW/cm}$  untersucht. Fig. 3 zeigt, wie rapide der Schwankungsgrad mit der Feldstärke fällt; die Kurve läßt den durchaus berechtigten Schluß zu, daß die Schwankung  $S$  schon bei endlichen Feldwerten zu Null wird und somit die sechsfache Periodizität bei kleinen Feldern in die durch Gleichung (II, 3) geforderte Kreissymmetrie um die Hauptachse übergeht. Unterstützt wird diese Annahme

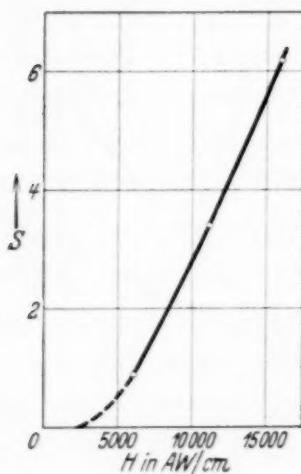


Fig. 3.

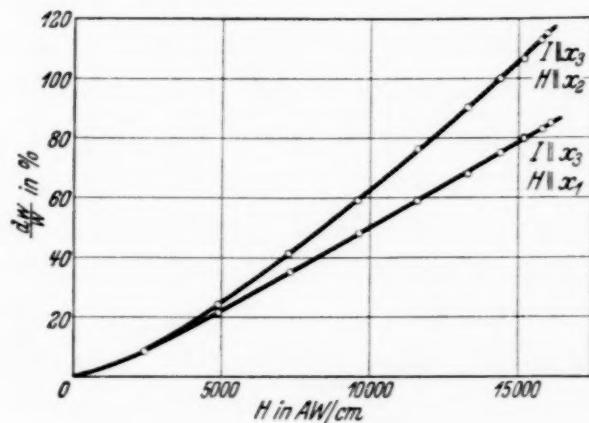


Fig. 4.

noch durch die Kurven der Fig. 4, welche die relative Widerstandsänderung  $dw/w$  als Funktion der Feldstärke  $H$  für die Fälle  $J \parallel x_3$ ,  $H \parallel x_1$  und  $J \parallel x_3$ ,  $H \parallel x_2$  wiedergibt. Die beiden Kurven gehen bei einer Feldstärke von  $H \sim 2000 \text{ AW/cm}$  ineinander über. Man erkennt auch an der unteren Kurve ( $J \parallel x_3$ ,  $H \parallel x_1$ ), daß in Feldern von  $5000 \text{ AW/cm}$  bereits das  $H^2$ -Gesetz nicht mehr gilt. Im ganzen finden wir also auch hier die Kohlersche Gleichung nicht im Widerspruch mit dem Experiment.

In ähnlicher Weise lassen sich die Fälle, die den beiden letzten Gleichungen der Gruppe II entsprechen, diskutieren. II, 4 stellt die Widerstandsänderungen parallel und senkrecht zu einer Nabennachse dar, wenn das Magnetfeld parallel zur Hauptachse liegt, II, 5 den gleichen Fall, wenn das Feld senkrecht oder parallel zu der betreffenden Nebenachse liegt (Feld stets senkrecht zum Strom). Die beiden Fälle sind, wie sich experimentell ergibt (siehe oben, l. c.), in starken Feldern *nicht* gleichwertig; vielmehr besteht auch bei dieser Orientierung von Strom, Feld und Kristallachsen eine Ungleichwertigkeit der Richtungen 1 und 2. Dieses wiederum in einer Sechszähligkeit zum Ausdruck kommende Verhalten tritt eben ganz allgemein immer dann in Erscheinung, wenn sich bei einer Drehung

der Elementarzelle um die Hauptachse die Neigungswinkel zwischen den Nebenspalten und den durch das Magnetfeld modifizierten Elektronenbahnen ändert. Wir können aber auch für diese beiden Fälle die Gültigkeit der Kohlerschen Rechnungen in kleinen Feldern sehr wahrscheinlich machen, indem wir von den Ergebnissen für höhere Feldstärken extrapoliieren, ähnlich wie oben in I, 2 und II, 3. Dann zeigt sich an Hand der Fig. 5 und 6, daß bis herauf zu etwa  $H = 2000 \text{ AW/cm}$  die beiden Fälle

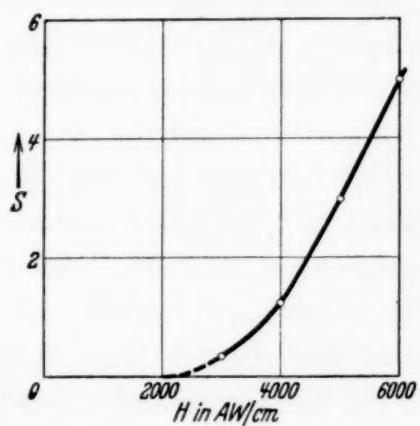


Fig. 5.

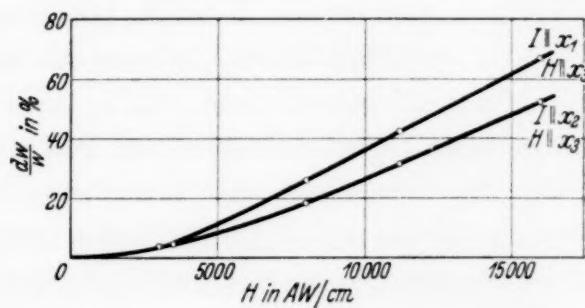


Fig. 6.

$J \parallel x_1, H \parallel x_3$  und  $J \parallel x_2, H \parallel x_3$  einander gleich sind, während in hohen Feldern eine ziemlich starke Diskrepanz zwischen beiden auftritt. Das gleiche gilt für II, 5, wie die Fig. 7 und 8 zeigen. Hier liegt der kritische

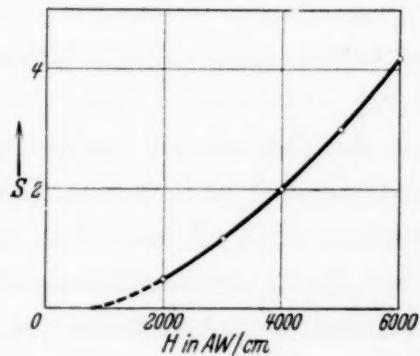


Fig. 7.

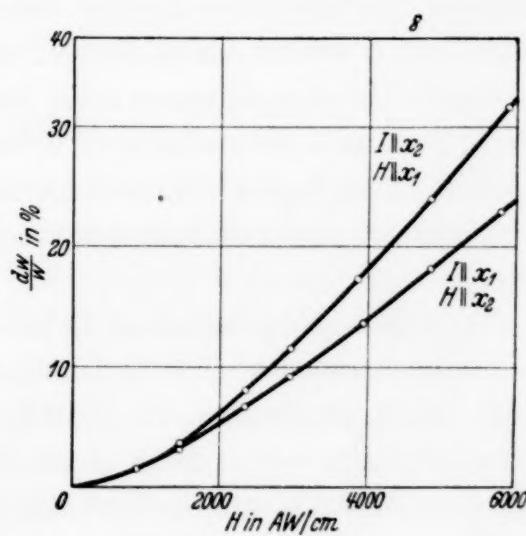


Fig. 8.

Feldwert, bis zu welchem offenbar das  $H^2$ -Gesetz und die Kohlersche Rechnung noch gültig sind, bei  $H = 800$  bis  $1000 \text{ AW/cm}$ , und erst dann fallen die Fälle  $J \parallel x_1, H \parallel x_2$  und  $J \parallel x_2, H \parallel x_1$  auseinander.

Erheblich schwieriger wird nun eine Diskussion der letzten *Gruppe III* von Widerstandsparametern. Hier sind im allgemeinen die Indizes für Strom und Spannung ( $i, k$ ) und für die Feldkomponenten ( $l, m$ ) nicht mehr einander gleich; wir haben es also nicht mehr mit reinen Longitudinal- oder Transversaleffekten zu tun. Vielmehr treten hier die Größen  $E, J$  und  $H$  in Komponenten zerlegt in Erscheinung und es ist schwer, sich die Parameter so anschaulich zu deuten, wie es bei den Gruppen I und II möglich war. Immerhin gelingt es unter Zuhilfenahme der Vorstellungen vom Hall-Effekt wenigstens, das Auftreten solcher Widerstandsparameter mit gemischten Indizes wie in Gruppe III verständlich zu machen. Wir wollen dazu nur das erste und einfachste Beispiel, Gleichung (III, 6) herausgreifen.

Es ist vom Hall-Effekt her bekannt, daß ein Magnetfeld das Verhalten der Leitungselektronen nicht nur in *einer* Richtung modifiziert, sondern in allen Richtungen senkrecht zum Feld (Verschiebung der Äquipotentiallinien). Die Verteilung des elektrischen Strömungsvektors ändert sich: es treten für ihn neue Komponenten auf, die ohne äußeres Magnetfeld nicht bestanden. Selbstverständlich wird auch der Widerstand dieser *neuen* Richtungen, in denen vorher kein Strom floß, durch das Feld verändert. Das ist aber gerade die Aussage von Gleichung (III, 6), die das Gegenstück zu (II, 3) ist: Liegt das Feld in Richtung 1 und der Strom in Richtung 3, so haben wir nicht lediglich diese Richtung 3 auf ihre Widerstandsänderung hin zu untersuchen, wie in (II, 3), sondern wir haben auch gemäß den Aussagen des Hall-Effektes die neu hinzukommende elektrische Strömung in Richtung 2 mitzuberücksichtigen. So sind die Widerstandsparameter der Gruppe III ganz allgemein nicht nur für eine bestimmte Richtung von Strom, Feld und Kristallachsen definiert, sondern umfassen auch die weitergehenden, im Hall-Effekt steckenden Bedingungen für die Bewegung eines Elektrons im Kristallgitter unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes.

Wir wollen in der folgenden Tabelle noch die Zahlenwerte für die acht Widerstandsparameter eines Bi-Einkristalls angeben, wie sie sich nach den Kohlerschen Ergebnissen als Mittelwerte für die  $R_{iklm}$  darstellen. Die Magnetfeldstärke betrug dabei in der früheren Kohlerschen Arbeit allerdings  $H = 3000 \text{ AW/cm}$ , ein Wert also, bei welchem nach dem Vorstehenden das  $H^2$ -Gesetz schon merklich in ein  $H$ -Gesetz übergegangen sein kann. Die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte sind indessen den neuen Kohlerschen Berechnungen (dieses Heft, folgende Arbeit) entnommen, für deren Bereitstellung *vor* der Drucklegung ich Herrn Dr. Kohler sehr dankbar bin.

## Tabelle.

Die acht Parameter der magnetischen Widerstandsänderung für den Bi-Kristall.

*I. Längseffekt:*

1.  $R_{3333} = 1,04 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$ <sup>1)</sup>
2.  $R_{1111} = R_{2222} = 8,3 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$

*II. Quereffekt:*

3.  $R_{3311} = R_{3322} = 12,4 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$
4.  $R_{1133} = R_{2233} = 3,2 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$
5.  $R_{1122} = R_{2211} = 12,4 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$

*III. Gemischte Komponenten:*

6.  $R_{3211} = -R_{3222} = R_{3121}$ <sup>2)</sup>
7.  $R_{1123} = -R_{2223} = R_{2113} = 2,15 \cdot 10^{-9} w_{\perp}$
8.  $R_{3113} = R_{3223} = -0,25 \cdot 10^{-9} w_{450}$

Man erkennt aus dieser Tabelle, in völliger Übereinstimmung mit dem Experiment, daß die Widerstandsänderung längs der Hauptachse des Kristalls bei longitudinaler Magnetisierung (I, 1) sehr klein, bei transversaler Magnetisierung (II, 3) hingegen sehr groß ist. Überhaupt ist die Widerstandsänderung verhältnismäßig klein, wenn das Magnetfeld  $H$  oder eine seiner Komponenten in die Richtung der Hauptachse fällt (II, 4; III, 7; III, 8), in allen anderen Fällen dagegen erheblich größer. Unter den gemischten Komponenten kommen sogar Fälle *negativer R-Werte* vor, in denen also das Magnetfeld nicht eine Widerstandserhöhung, sondern eine Widerstandsverringerung bewirkt, eine bisher nur an ferromagnetischen Stoffen beobachtete Erscheinung.

*III. Schluß.*

Es wurde in der Einleitung erwähnt, daß man das reichhaltige experimentelle Material der magnetischen Widerstandsänderung in Kristallen bisher mangels eines ausreichenden theoretischen Rahmens nach kristallographischen Gesichtspunkten ordnete. Die vorstehenden Ausführungen sollen nun nicht nur dazu dienen, physikalische Bedeutung und Gültigkeitsbereiche der aus der Rechnung sich ergebenden Parameter der magnetischen Widerstandsänderung  $R_{iklm}$  zu diskutieren, sondern mit ihrer Hilfe auch das kristallographische Ordnungsprinzip sicherer zu fundieren, indem man durch die Rechnung die Gewähr dafür bekommt, wirklich alle für die Leitfähigkeit eines Kristalls im Magnetfeld wichtigen Orientierungen erfaßt

<sup>1)</sup>  $w_{\perp}$  bedeutet den spezifischen Widerstand ohne Magnetfeld senkrecht zur kristallographischen Hauptachse. — <sup>2)</sup> Hierfür liegen leider noch keine Messungen bei genügend kleinen Feldstärken vor.

zu haben. Eine genaue Kenntnis dieser Richtungen ist z. B. dann von besonderer Bedeutung, wenn man die *Anisotropie* im elektrischen Verhalten des Gitters im Magnetfeld studieren will. *Ohne* Magnetfeld ist sie für den Bi-Kristall durch einen einzigen Zahlenwert,  $w_{\parallel}/w_{\perp}$ , bestimmt; *mit* Magnetfeld hingegen tritt eine völlige Aufspaltung der Begriffe  $w_{\parallel}$  und  $w_{\perp}$  ein, oder besser: ein  $w$ -Wert ist dann gar nicht mehr durch eine bestimmte Richtung im Gitter charakterisiert. Um auch hier noch bei der Vielzahl der auftretenden Anisotropien  $w_i/w_k$  die typischen *Hauptanisotropien* zu erfassen<sup>1)</sup>, muß man natürlich zuvor die Hauptleitfähigkeiten des Kristallgitters kennen, d. h. die eingangs gestellte Frage beantworten können: *Wieviele und welche Richtungen der Leitfähigkeit bei Anwesenheit eines Magnetfeldes notwendig und hinreichend sind, um das Gitter elektrisch vollkommen zu definieren.* Das ist aber nach den vorstehenden Ausführungen jetzt möglich.

#### *Nachtrag.*

In einer neuen Veröffentlichung (dieses Heft, folgende Arbeit) hat Kohler jetzt auch alle die Fälle, die nach dem Vorstehenden bei Zugrundelegung eines  $H^2$ -Gesetzes für die magnetische Widerstandsänderung noch eine Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie in starken Feldern ergaben, durch Berücksichtigung der vierten und sechsten Potenzen von  $H$  mit dem Experiment in Einklang gebracht (mit einer einzigen Ausnahme). Es ergibt sich daraus weiter, daß in den bisherigen Arbeiten I bis VI zur magnetischen Widerstandsänderung des Bi-Gitters bereits alle charakteristischen Fälle enthalten waren und somit zu einer umfassenden Darstellung des Anisotropieproblems dieses Gitters alle experimentellen Daten vollständig vorliegen.

Berlin, im März 1935.

---

<sup>1)</sup> Eine Untersuchung über die elektrischen Leitfähigkeitsanisotropien des Bi-Kristalls ist bereits abgeschlossen und wird in Kürze an dieser Stelle veröffentlicht werden.

## Magnetische Widerstandsänderung in Metallkristallen.

Von Max Kohler in Berlin.

(Eingegangen am 4. Mai 1935.)

Durch Berücksichtigung höherer Potenzen in der magnetischen Feldstärke lassen sich — bis auf eine Ausnahme — sämtliche experimentell gefundenen Abweichungen vom Verhalten bei kleinen Feldern erklären.

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> wurde die Abhängigkeit der magnetischen Widerstandsänderung von der kristallographischen Orientierung der magnetischen Feldstärke und des elektrischen Stromes für kleine magnetische Felder untersucht, wo die Widerstandsänderung proportional zum Quadrat der magnetischen Feldstärke ist. Zum Vergleich der Ergebnisse mit dem Experiment kamen damals nur die Stierstadtschen Versuche<sup>2)</sup> an Bi in Frage, da nur bei diesen die Grundvoraussetzung der quadratischen Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der magnetischen Feldstärke einigermaßen erfüllt war. Die niedrigste Feldstärke, bei der Stierstadt noch experimentelle Daten gab, war im allgemeinen 3000 AW/cm. Aus den Diagrammen, die die Feldabhängigkeit der Widerstandsänderung eines bestimmten Kristallstabes darstellen, ergab sich, daß die Grundvoraussetzung bei dieser Feldstärke für manche Kristallstäbe nur noch sehr mangelhaft gültig war. Dementsprechend konnte nur ein Teil des experimentellen Materials gedeutet werden. Umgekehrt konnten mehrere theoretische Folgerungen nicht geprüft werden, weil die verwendeten magnetischen Feldstärken nicht klein genug waren. Durch eine neue Arbeit von Stierstadt<sup>3)</sup> ist auf die Widerstandsänderung bei kleinen Feldern neues Licht geworfen worden. Sie bestätigt wichtige Folgerungen der theoretischen Ansätze. Die früheren Symmetriebetrachtungen für Bi ergaben für die Parameter der quadratischen Widerstandsänderung  $R_{iklm}$  ( $i, k, l, m = 1, 2, 3$ ) folgende Symmetriebeziehungen:

$$R_{1111} = R_{2222}, \quad (I)$$

$$R_{1122} = R_{2211}, \quad (II)$$

$$R_{3311} = R_{3322}, \quad (III)$$

$$R_{1133} = R_{2233}, \quad (IV)$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{3211} = -R_{3222} = R_{3121}, \\ R_{1123} = -R_{2223} = R_{2113}, \\ R_{3113} = R_{3223}. \end{array} \right\} \quad (V)$$

<sup>1)</sup> M. Kohler, Ann. d. Phys. **20**, 891, 1934. — <sup>2)</sup> O. Stierstadt, ZS. f. Phys. **80**, 636, 1933; **85**, 310, 1933; **85**, 697, 1933; **87**, 687, 1934; **93**, 676, 1935.—

<sup>3)</sup> Ebenda, vorhergehende Arbeit. Im folgenden sind sämtliche Arbeiten von Stierstadt der Reihe nach mit Stierstadt I, ... Stierstadt VI bezeichnet.

Der trigonalen Achse entspricht die  $x_3$ -Achse, einer zweizähligen Achse die  $x_1$ -Achse.

Die Beziehung (I) besagt Gleichheit der longitudinalen Widerstandsänderung von Kristallstäben, die parallel zu einer binären Achse oder senkrecht dazu in der Hauptspaltebene gerichtet sind, oder in der Stierstadtschen Bezeichnungsweise, Gleichheit von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen. Der Beziehung (II) entspricht Gleichheit der transversalen Widerstandsänderung von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen, wenn das Magnetfeld auch gleichzeitig senkrecht zur Hauptachse ist. Diese beiden Folgerungen können nach Stierstadt<sup>1)</sup> als bestätigt betrachtet werden für Felder unterhalb 1000 AW/cm. Bei höheren Feldstärken weichen die  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristalle hinsichtlich ihrer longitudinalen und transversalen Widerstandsänderung systematisch voneinander ab. Die Übergangstypen  $P_1^{\parallel} — P_1^{\perp}$  zeigen dann bekanntlich die Sechszähligkeit in der Widerstandsänderung<sup>2)</sup>.

Gleichung (III) drückt Gleichwertigkeit von  $P_3$ -Kristallen aus bei transversaler Magnetisierung, wenn das Magnetfeld in Richtung einer binären Achse oder senkrecht dazu steht. Gleichung (IV) besagt Gleichheit der transversalen Widerstandsänderung von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen, das Magnetfeld in Richtung der trigonalen Hauptachse. Diese beiden Folgerungen der Theorie sind<sup>2)</sup> mit ziemlicher Sicherheit unterhalb von 2500 AW/cm erfüllt. Für höhere Feldstärken aber keineswegs mehr. Es ergibt sich bei Drehung eines  $P_3$ -Kristalls um seine Längsachse und transversaler Magnetisierung die insbesondere von Schubnikow und de Haas<sup>3)</sup> untersuchte Sechszähligkeit. Auch die Gleichwertigkeit von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen, wenn das Magnetfeld in Richtung der Hauptachse fällt, scheint nach Stierstadt<sup>4)</sup> oberhalb von 2500 AW/cm nicht mehr vorhanden zu sein. Allerdings liegen in diesem Fall keine Messungen an Übergangstypen  $P_1^{\parallel} — P_1^{\perp}$  vor.

Es sollen noch kurz diejenigen Erscheinungen zusammengestellt werden, die durch die Annahme quadratischer Feldabhängigkeit *nicht* gedeutet werden können:

- a) Die höheren Fourier-Koeffizienten von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen in Stierstadt I.
- b) Das Auftreten der Sechszähligkeit bei longitudinaler Magnetisierung von Kristallen der Übergangsserie  $P_1^{\parallel} — P_1^{\perp}$  (Stierstadt III).

<sup>1)</sup> ZS. f. Phys., vorhergehende Arbeit. — <sup>2)</sup> Stierstadt II, Fig. 5 und 7.

— <sup>3)</sup> L. Schubnikow u. W. J. De Haas, Comm. Leiden 207d und 210.

— <sup>4)</sup> Stierstadt VI.

- c) Das Auftreten der Sechszähligkeit bei transversaler Magnetisierung von Kristallen der Übergangsserie  $P_1^{\parallel} - P_1^{\perp}$ , Feld senkrecht zur Hauptachse (Stierstadt III).
- d) Die Sechszähligkeit bei transversaler Magnetisierung von  $P_3$ -Kristallen (Stierstadt II).
- e) Der Unterschied im Verhalten von  $P_3^{\parallel}$  und  $P_3^{\perp}$  in Stierstadt I.
- f) Das verschiedene Verhalten von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen bei transversaler Magnetisierung, das Magnetfeld in Richtung der Hauptachse (Stierstadt V und VI).

Es wird im folgenden der Versuch gemacht, diese Erscheinungen unter der Annahme der Gültigkeit des verallgemeinerten Ohmschen Gesetzes, und Berücksichtigung höherer Potenzen als der zweiten in der magnetischen Feldstärke, zu deuten. Da experimentell bisher ausschließlich Bi-Kristalle verwendet wurden, sollen auch hier die Untersuchungen nur für Kristalle der Bi-Symmetrie durchgeführt werden. Trotzdem können die Betrachtungen leicht auf Kristalle anderer Kristallsymmetrien ausgedehnt werden.

Die magnetische Widerstandsänderung ist sicher dann eine gerade Funktion der magnetischen Feldstärke, wenn man sie durch Kommutieren der magnetischen Feldstärke und Mittelwertbildung bestimmt. Außer den quadratischen Gliedern in der magnetischen Feldstärke kämen also Glieder der vierten und sechsten Potenz in Frage. Es wird sich zeigen, daß man nur bis zur sechsten Potenz zu gehen braucht, um beinahe sämtliche Abweichungen von dem Verhalten bei kleinen Feldstärken zu bekommen.

Das Ohmsche Gesetz soll im Magnetfeld lauten ( $\mathfrak{E}$  elektrische Feldstärke,  $\mathfrak{J}$  Stromdichte,  $\mathfrak{H}$  Magnetfeld):

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \sum_{k,l,m=1}^3 R'_{iklm} J_k H_l H_m + \sum_{k,l,m,n,o=1}^3 R'_{iklmno} J_k H_l H_m H_n H_o \\ + \sum_{k,l,m,n,o,p,q=1}^3 P'_{iklmnopq} J_k H_l H_m H_n H_o H_p H_q.$$

Die  $R'_{iklmno}$  bzw.  $P'_{iklmnopq}$  verhalten sich gegenüber Drehungen des Koordinatensystems wie die Komponenten eines Tensors sechsten bzw. achten Grades. Die in der magnetischen Feldstärke quadratischen Glieder lassen wir in Zukunft weg, da sie schon in der früheren Arbeit untersucht sind. Zur Vereinfachung können zunächst zwei Tensoren mit den

Komponenten  $\lambda'_{iklmn}$  und  $\lambda''_{iklmnop}$  so abgespalten werden, daß sowohl  $R'_{iklmno}$  und  $P'_{iklmnopq}$  in den ersten beiden Indizes symmetrisch sind, wie dies auch in der früheren Arbeit geschehen ist. Man zerlege:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + [\Im \mathfrak{L}]_i + \sum_{k,l,m,n,o=1}^3 R_{iklmno} J_k H_l H_m H_n H_o \\ + \sum_{k,l,m,n,o,p,q=1}^3 P_{iklmnopq} J_k H_l H_m H_n H_o H_p H_q,$$

wobei

$$L_i = \sum_{k,l,m,n=1}^3 \lambda'_{iklmn} H_k H_l H_m H_n + \sum_{k,l,m,n,o,p=1}^3 \lambda''_{iklmnop} H_k H_l H_m H_n H_o H_p.$$

Die Tensoren  $\lambda'$  und  $\lambda''$  tragen nichts zur Widerstandsänderung bei, da die entsprechende Feldstärke  $[\Im \mathfrak{L}]$  senkrecht zum Strom steht. Um nicht immer alle sechs oder gar acht Indizes mitschleppen zu müssen, führen wir eine neue Bezeichnungsweise durch. Die beiden ersten Indizes  $i$  und  $k$  charakterisieren die elektrische Feldstärke und die Stromdichte, sie sollen unverändert beibehalten werden. Dagegen soll der dritte Index in der neuen Bezeichnung die Potenz in  $H_1$  angeben, der vierte Index die Potenz in  $H_2$ . Die Potenz in  $H_3$  ergibt sich dann einfach daraus, daß die Summe der Potenzen von  $H_1$  und  $H_2$  und  $H_3$  gleich 4 bzw. 6 sein muß. Der dritte und vierte Index sollen oben geschrieben werden. Zum Unterschied gegenüber den unteren Indizes werden sie im allgemeinen mit griechischen Buchstaben bezeichnet. Nun lautet das Ohmsche Gesetz:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \sum_{\alpha,\beta=0}^4 \sum_{k=1}^3 R_{ik}^{\alpha\beta} J_k H_1^\alpha H_2^\beta H_3^{4-\alpha-\beta} \\ + \sum_{\alpha,\beta=0}^6 \sum_{k=1}^3 P_{ik}^{\alpha\beta} J_k H_1^\alpha H_2^\beta H_3^{6-\alpha-\beta}. \quad (1)$$

Dieses Gesetz ist den Kristallsymmetrien zu unterwerfen. Die in der früheren Arbeit verwendete Methode zur Anpassung an die Symmetrien des Kristalls ist hier nicht mehr anwendbar, wegen zu großer mathematischer Komplikationen. Dasselbe gilt für eine von C. Hermann<sup>1)</sup> entwickelte sehr elegante Methode. Es wird hier die wohl einfachste Methode angegeben, um für alle praktischen Fälle die Anpassung an Symmetrieelemente elementar durchführen zu können.

---

<sup>1)</sup> C. Hermann, ZS. f. Krist. (A) **89**, 32, 1934.

*§ 1. Neuberechnung der Parameter zweiter Ordnung  $R_{iklm}$  der Widerstandsänderung.*

In der früheren Arbeit wurden die Werte der Parameter  $R_{iklm}$  aus Messungen bei 3000 AW/cm, wo das quadratische Gesetz der Widerstandsänderung schon merklich versagt, ermittelt. Die so erhaltenen Werte sind demgemäß ungenau. Nach der neuen Veröffentlichung von Stierstadt (Stierstadt VI) ist eine bessere Bestimmung möglich. Wie sich zeigt, sind die früher erhaltenen Werte durchweg zu klein. Es folgt:

$$\begin{aligned} R_{1111} &= R_{2222} = 8,3 \cdot 10^{-9} w_{\perp}, \\ R_{1122} &= R_{2211} = 12,4 \cdot 10^{-9} w_{\perp}, \\ R_{1133} &= R_{2233} = 3,2 \cdot 10^{-9} w_{\perp}, \\ R_{3311} &= R_{3322} = 12,4 \cdot 10^{-9} w_{\perp}, \\ R_{3333} &= 1,04 \cdot 10^{-9} w_{\perp}. \end{aligned}$$

$w_{\perp}$  bedeutet den spezifischen Widerstand senkrecht zur Hauptachse ohne Magnetfeld,  $w_{\parallel}$  entsprechend parallel zur Hauptachse. Bei der Berechnung dieser Zahlwerte ist  $w_{\parallel}/w_{\perp} = 1,27$  zugrunde gelegt.

Die Parameter  $2 R_{2223}$  und  $2 R_{1123}$  hatten wir aus Messungen an  $P_2^{\perp}$ -Kristallen in Stierstadt I und an  $P_1^{\parallel}$ -Kristallen in Stierstadt II ermittelt. Bedeutet  $\varphi$  im ersten Fall den Winkel zwischen Strom und Magnetfeld, so ergab sich für die Widerstandsänderung:

$$\Delta w = (R_{2222} \cos^2 \varphi + R_{2233} \sin^2 \varphi - 2 R_{2223} \sin \varphi \cos \varphi) H^2.$$

Im zweiten Fall sei  $\varphi$  der Winkel zwischen Magnetfeld und der  $x_2$ -Achse. Die Widerstandsänderung ist dann:

$$\Delta w = (R_{1122} \cos^2 \varphi + R_{1133} \sin^2 \varphi + 2 R_{1123} \sin \varphi \cos \varphi) \cdot H^2.$$

Die Terme  $-2 R_{2223} \sin \varphi \cos \varphi$  und  $2 R_{1123} \sin \varphi \cos \varphi$  bedingen, daß die Widerstandsänderung ihre Maximalwerte nicht mehr bei  $0$  und  $90^\circ$  annimmt, sondern bei dazwischenliegenden Werten. Die Verschiebung  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  der Extremwerte ist im ersten Fall:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_1 = - \frac{2 R_{2223}}{R_{2222} - R_{2233}},$$

im zweiten Fall:

$$\operatorname{tg} 2 \varphi_2 = \frac{2 R_{1123}}{R_{1122} - R_{1133}}.$$

Auf Grund der Symmetrieverhältnisse ist nun  $R_{1133} = R_{2233}$ ;  $R_{1111} = R_{2222}$ ;  $2 R_{1123} = -2 R_{2223}$ . Da der transversale Widerstands-

änderungsparameter  $R_{1122}$  wesentlich größer ist als der longitudinale Parameter  $R_{1111}$ , so folgt  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Die Versuche sind nicht genau genug, um dies entscheiden zu können. Nimmt man  $\varphi_1 = 20^\circ$ , so folgt

$$2 R_{2223} = -4,3 \cdot 10^{-9} w_\perp.$$

Das einzige noch nicht bestimmte Wertetripel ist  $R_{3211} = -R_{3222} = R_{3121}$ . Diese Parameter könnte man etwa ermitteln aus der transversalen Widerstandsänderung der Übergangsserie  $P_1^\perp - P_3^\parallel$ , das Magnetfeld immer in Richtung der  $x_1$ -Achse. Es wäre dann:

$$E_2 = R_{2211} J_2 H^2 + R_{2311} J_3 H^2; E_3 = R_{3211} J_2 H^2 + R_{3311} J_3 H^2.$$

Daraus, wenn  $J_2 = J \cos \varphi$ ,  $J_3 = J \sin \varphi$  gesetzt wird:

$$\Delta w = (R_{2211} \cos^2 \varphi + R_{3311} \sin^2 \varphi + 2 R_{3211} \sin \varphi \cos \varphi) H^2.$$

Leider liegen derartige Messungen bei genügend kleinen Feldstärken nicht vor.

## § 2. Widerstandsänderung in isotropen Körpern.

Das Ohmsche Gesetz muß in isotropen Körpern invariant sein gegenüber sämtlichen räumlichen Drehungen des Koordinatensystems. Ein solches Gesetz muß sich in Vektorform schreiben lassen. Es müssen Vektoren aus den beiden Vektoren  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{H}$  so gebildet werden, daß  $\mathfrak{J}$  linear und  $\mathfrak{H}$  in gerader Potenz auftritt. Die einzigen Vektoren dieser Art sind:

$$(P_1 H^2 + P_2 H^4 + \dots) \mathfrak{J}; \quad (P'_1 + P'_2 H^2 + \dots) \cdot (\mathfrak{J} \mathfrak{H}) \mathfrak{H} \\ (P''_1 + P''_2 H^2 + \dots) [\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]]; (P'''_1 + P'''_2 H^2 + \dots) [\mathfrak{H} [\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]]] \text{ usw.}$$

Die letzten Ausdrücke lassen sich auf die beiden ersten zurückführen. Denn es ist:

$$[\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]] = \mathfrak{J} \cdot H^2 - \mathfrak{H} \cdot (\mathfrak{J} \mathfrak{H}) \text{ und } [\mathfrak{H} [\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]]] = -[\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]] \cdot H^2$$

usw. Die allgemeinste Form des Ohmschen Gesetzes in isotropen Körpern lautet demnach:

$$E_i = w \cdot J_i + (P_1 H^2 + P_2 H^4 + \dots) \cdot J_i + (P'_1 + P'_2 H^2 + \dots) (\mathfrak{J} \mathfrak{H}) \cdot H_i \\ = w \cdot J_i + [P_1 + P'_1 + (P_2 + P'_2) H^2 + \dots] (\mathfrak{J} \mathfrak{H}) H_i \\ + (P'_1 + P'_2 H^2 + \dots) [\mathfrak{H} [\mathfrak{J} \mathfrak{H}]]_i.$$

$w$  bedeutet den Widerstand ohne Magnetfeld.

Es sei in der  $x_1$ -Richtung eine Stromdichte  $J$  vorhanden. Das magnetische Feld bilde mit dem Strom den Winkel  $\varphi$ . Es ist dann:

$$\Delta w = \frac{E_1}{J_1} - w = [(P_1 + P'_1) H^2 + (P_2 + P'_2) H^4 + \dots] \cdot \cos^2 \varphi \\ + (P_1 H^2 + P_2 H^4 + \dots) \sin^2 \varphi.$$

D. h. es folgt das experimentell bestätigte  $\cos^2$ -Gesetz. Die Funktion  $H^2 [(P_1 + P'_1) + (P_2 + P'_2) H^2 + \dots]$  hat die Bedeutung der longitudinalen, die Funktion  $P_1 H^2 + P_2 H^4 + \dots$  die der transversalen Widerstandsänderung. Die erste werde mit  $P_l$ , die zweite mit  $P_t$  bezeichnet. Mit diesen Abkürzungen kann das Ohmsche Gesetz im Magnetfeld und isotropen Körpern wie folgt geschrieben werden:

$$E_i = w \cdot J_i + \frac{P_l}{H^2} (\Im \mathfrak{H}) H_i + \frac{P_t}{H^2} [\mathfrak{H} [\Im \mathfrak{H}]]_i.$$

### § 3. Umformung des Ohmschen Gesetzes für Kristalle.

In kristallinen Körpern muß das Ohmsche Gesetz nicht gegenüber sämtlichen Drehungen des Raumes invariant sein, sondern nur gegenüber den Decktransformationen des Kristalls. Da der Vorgang der Widerstandsänderung, wie aus unserem allgemeinen Ansatz (1) für das Ohmsche Gesetz hervorgeht, zentrisch symmetrisch ist, lassen sich die Decktransformationen der noch elf verschiedenen Kristallklassen aus Drehungen allein zusammensetzen. Die obige Form des Ohmschen Gesetzes in isotropen Körpern ist auch gegenüber den Decktransformationen der Kristalle invariant, und dementsprechend in allen Kristallen möglich. Zu den Gliedern für den isotropen Körper werden in Kristallen aber noch Zusatzglieder hinzutreten, die nur gegenüber den speziellen Kristaldecktransformationen invariant sind und in isotropen Körpern verschwinden. Aus unserem allgemeinen Ansatz (1) werden wir zweckmäßig die Glieder herausziehen, die gegenüber sämtlichen räumlichen Drehungen invariant sind. Wir schreiben das Ohmsche Gesetz in der Form:

$$E_i = \sum_{k=1}^3 w_{ik} J_k + \frac{P_l}{H^2} (\Im \mathfrak{H}) H_i + \frac{P_t}{H_2} [\mathfrak{H} [\Im \mathfrak{H}]]_i \\ + \sum_{\alpha, \beta=0}^4 \sum_{k=1}^3 R_{ik}^{\alpha\beta} J_k H_1^\alpha H_2^\beta H_3^{4-\alpha-\beta} + \sum_{\alpha, \beta=0}^6 \sum_{k=1 \cdot 3}^6 P_{ik}^{\alpha\beta} J_k H_1^\alpha H_2^\beta H_3^{6-\alpha-\beta}. \quad (2)$$

$P_l$  und  $P_t$  sind jetzt auch nur Funktionen der magnetischen Feldstärke, deren höchste Potenz 6 ist. Die jetzigen  $R_{ik}^{\alpha\beta}$  und  $P_{ik}^{\alpha\beta}$  sind natürlich andere als im Ansatz (1). Dieselbe Bezeichnungsweise kann wohl kaum zu Miß-

verständnissen Anlaß geben. Die jetzigen  $R_{ik}^{\alpha\beta}$  und  $P_{ik}^{\alpha\beta}$  sind für einen isotropen Körper Null. Die in der magnetischen Feldstärke quadratischen Glieder sind überhaupt weggelassen.

Die Symmetrien des Bi-Kristalls bestehen aus einer dreizähligen Achse und drei dazu senkrechten, um  $120^\circ$  gegeneinander geneigten zweizähligen Achsen. Die  $x_3$ -Achse des Koordinatensystems sei in Richtung der Hauptachse, die  $x_1$ -Achse in Richtung einer zweizähligen Achse. Leicht läßt sich (2) der zweizähligen Achse um die  $x_1$ -Achse anpassen. Die Decktransformation lautet:  $x'_2 = -x_2$ ,  $x'_3 = -x_3$ . Soll das Ohmsche Gesetz (2) gegenüber dieser Transformation invariant sein, so müssen sämtliche Parameter  $R_{ik}^{\alpha\beta}$  bzw.  $P_{ik}^{\alpha\beta}$  verschwinden, für die

1.  $i = k = 1$ ,  $\alpha$  ungerade,
2.  $i$  und  $k \neq 1$ ,  $\alpha$  ungerade,
3.  $i = 2$  oder  $3$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha$  gerade.

Schwieriger gestaltet sich die Anpassung der Parameter  $R_{ik}^{\alpha\beta}$  und  $P_{ik}^{\alpha\beta}$  an die trigonale Achse.

#### *§ 4. Behandlung der Fälle, wo sowohl der elektrische Strom als auch das Magnetfeld senkrecht zur trigonalen Hauptachse ist.*

Für die den Parametern  $R_{ik}^{\alpha\beta}$  bzw.  $P_{ik}^{\alpha\beta}$  entsprechende elektrische Feldstärke sei im folgenden dieselbe Bezeichnung gebraucht, wie bisher für die gesamte elektrische Feldstärke. Es folgt dann mit Rücksicht auf die Ergebnisse des vorigen Paragraphen hinsichtlich der Beschränkungen durch die zweizählige Achse in der  $x_1$ -Richtung:

$$\begin{aligned} E_1 &= R_{11}^{40} J_1 H_1^4 + R_{11}^{22} J_1 H_1^2 H_2^2 + R_{11}^{04} J_1 H_2^4 + R_{12}^{31} J_2 H_1^3 H_2 + R_{12}^{13} J_2 H_1 H_2^3 \\ &\quad + P_{11}^{60} J_1 H_1^6 + P_{11}^{42} J_1 H_1^4 H_2^2 + P_{11}^{24} J_1 H_1^2 H_2^4 + P_{11}^{06} J_1 H_2^6 + P_{12}^{51} J_1 H_1^5 H_2 \\ &\quad + P_{12}^{33} J_2 H_1^3 H_2^3 + P_{12}^{15} J_2 H_1 H_2^5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= R_{22}^{40} J_2 H_1^4 + R_{22}^{22} J_2 H_1^2 H_2^2 + R_{22}^{04} J_2 H_2^4 + R_{21}^{31} J_1 H_1^3 H_2 + R_{21}^{13} J_1 H_1 H_2^3 \\ &\quad + P_{22}^{60} J_2 H_1^6 + P_{22}^{42} J_2 H_1^4 H_2^2 + P_{22}^{24} J_2 H_1^2 H_2^4 + P_{22}^{06} J_2 H_2^6 + P_{21}^{51} J_1 H_1^5 H_2 \\ &\quad + P_{21}^{33} J_2 H_1^3 H_2^3 + P_{21}^{15} J_2 H_1 H_2^5. \end{aligned}$$

Es sei  $\vartheta$  der Winkel der magnetischen Feldstärke mit der  $x_1$ -Achse,  $\varphi$  der Winkel zwischen Strom und Magnetfeld, so daß:

$$J_1 = J \cos(\vartheta - \varphi); \quad J_2 = J \sin(\vartheta - \varphi); \quad J_3 = 0.$$

$$H_1 = H \cos \vartheta; \quad H_2 = H \sin \vartheta; \quad H_3 = 0.$$

Führt man für die Komponenten von  $\Im$  und  $\mathfrak{H}$  diese Werte ein, so wird die Widerstandsänderung:

$$\Delta w = \frac{E_1 \cdot \cos(\vartheta - \varphi) + E_2 \sin(\vartheta - \varphi)}{|J|} = A \cos^2 \varphi + 2B \sin \varphi \cos \varphi + C \sin^2 \varphi, \quad (3)$$

wo  $A, B, C$  Abkürzungen für folgende Größen sind:

$$\begin{aligned} A = & [R_{11}^{40} \cos^6 \vartheta + (R_{11}^{22} + R_{22}^{40} + 2R_{12}^{31}) \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ & + (R_{11}^{04} + R_{22}^{22} + 2R_{12}^{13}) \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta + R_{22}^{04} \sin^6 \vartheta] H^4 + [P_{11}^{60} \cos^8 \vartheta \\ & + (P_{11}^{42} + P_{22}^{60} + 2P_{12}^{51}) \cos^6 \vartheta \sin^2 \vartheta + (P_{11}^{24} + P_{22}^{42} + 2P_{12}^{33}) \cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta \\ & + (P_{11}^{06} + P_{22}^{24} + 2P_{12}^{15}) \cos^2 \vartheta \sin^6 \vartheta + P_{22}^{06} \sin^8 \vartheta] H^6. \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} B = & [(R_{11}^{40} - R_{12}^{31} - R_{22}^{40}) \cos^5 \vartheta \sin \vartheta + (R_{11}^{22} + R_{12}^{31} - R_{22}^{13} \\ & - R_{22}^{22}) \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + (R_{11}^{04} + R_{12}^{13} - R_{22}^{04}) \cos \vartheta \sin^5 \vartheta] H^4 \\ & + [(P_{11}^{60} - P_{22}^{60} - P_{12}^{51}) \cos^7 \vartheta \sin \vartheta + (P_{11}^{42} + P_{12}^{51} - P_{22}^{33} \\ & - P_{22}^{42}) \cos^5 \vartheta \sin^3 \vartheta + (P_{11}^{24} + P_{12}^{33} - P_{12}^{15} - P_{22}^{24}) \cos^3 \vartheta \sin^5 \vartheta \\ & + (P_{11}^{06} + P_{12}^{15} - P_{22}^{06}) \cos \vartheta \sin^7 \vartheta] H^6. \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\begin{aligned} C = & [R_{22}^{40} \cos^6 \vartheta + (R_{11}^{40} + R_{22}^{22} - 2R_{12}^{31}) \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + (R_{11}^{22} + R_{22}^{04} \\ & - 2R_{12}^{13}) \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta + R_{11}^{04} \sin^6 \vartheta] H^4 + [P_{22}^{60} \cos^8 \vartheta + (P_{11}^{60} \\ & + P_{22}^{42} - 2P_{12}^{51}) \cos^6 \vartheta \sin^2 \vartheta + (P_{11}^{42} + P_{22}^{24} - 2P_{12}^{33}) \cos^4 \vartheta \sin^4 \vartheta \\ & + (P_{11}^{24} + P_{22}^{06} - 2P_{12}^{15}) \cos^2 \vartheta \sin^6 \vartheta + P_{11}^{06} \sin^8 \vartheta] H^6. \end{aligned} \quad (4c)$$

Die Form des Ausdrucks für  $\Delta w$  muß bei einer Drehung des Koordinatensystems um die trigonale Achse um  $120^\circ$  unverändert bleiben. Dem entspricht eine Änderung des Winkels  $\vartheta$  um  $120^\circ$ . Dies ist bei beliebigem Winkel  $\varphi$  zwischen Strom und Magnetfeld nur dann der Fall, wenn die Koeffizienten  $A, B, C$  in (3) die Periode  $120^\circ$  haben. Es muß also sein:

$$\begin{aligned} A = & (a_1 H^4 + a'_1 H^6) \cos 3 \vartheta + (a_2 H^4 + a'_2 H^6) \cos 6 \vartheta + \dots \\ & + (a''_1 H^4 + a'''_1 H^6) \sin 3 \vartheta + \dots \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} B = & (b_1 H^4 + b'_1 H^6) \cos 3 \vartheta + (b_2 H^4 + b'_2 H^6) \cos 6 \vartheta + \dots \\ & + (b''_1 H^4 + b'''_1 H^6) \sin 3 \vartheta + \dots \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} C = & (c_1 H^4 + c'_1 H^6) \cos 3 \vartheta + (c_2 H^4 + c'_2 H^6) \cos 6 \vartheta + \dots \\ & + (c''_1 H^4 + c'''_1 H^6) \sin 3 \vartheta + \dots \end{aligned} \quad (5c)$$

Nun ist:

$$\left. \begin{aligned} \cos n \vartheta &= \cos^n \vartheta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \vartheta \sin^4 \vartheta - \dots \\ \sin n \vartheta &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \vartheta \sin \vartheta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \vartheta \sin^3 \vartheta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

und

Diese beiden Formeln sind die einzigen homogenen Ausdrücke  $n$ -ter Ordnung in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$  für  $\cos n \vartheta$  und  $\sin n \vartheta$ , wie man leicht durch Induktion beweisen kann. Es sei schon für  $n = 2$  bewiesen (dies ist sicher richtig für  $n = 2 = 0$  und  $n = 2 = 2$ ). Angenommen, es gäbe noch einen anderen Ausdruck  $n$ -ter Ordnung für  $\cos n \vartheta$ , etwa  $a_0 \cos^n \vartheta + a_1 \cos^{n-2} \vartheta \sin^2 \vartheta + \dots$  (ungerade Potenzen in  $\sin \vartheta$  können nicht auftreten, da  $\cos n \vartheta$  eine gerade Funktion von  $\vartheta$  ist). Dieser Ausdruck müßte also identisch sein mit (6). Aus der Gleichheit für  $\vartheta = 0^\circ$  und  $\vartheta = 90^\circ$  folgt  $a_0 = 1$ , und  $a_{n/2} = (-1)^{n/2} *$ . In der Gleichung, die die Identität der beiden homogenen Ausdrücke  $n$ -ter Ordnung besagt, können demnach die Glieder  $\cos^n \vartheta$  und  $\sin^n \vartheta$  gestrichen werden. Dann kann man auf beiden Seiten  $\sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$  vorziehen. In den Klammern stehen homogene Funktionen  $n - 4$ -ter Ordnung in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$ . Diese können aber nach Voraussetzung nur dann einander identisch gleich sein, wenn entsprechende Glieder links und rechts einander gleich sind. Damit ist aber der Beweis erbracht. Entsprechend läßt sich der Beweis für  $\sin n \vartheta$  führen.

Nach (4a), (4b), (4c) setzen sich die Koeffizienten  $A, B, C$  aus je einer Funktion sechster Ordnung und einer Funktion achter Ordnung in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$  zusammen. Die einzige homogene Funktion sechster Ordnung in  $\cos \vartheta$  und  $\sin \vartheta$ , die die Periodizität  $120^\circ$  besitzt und gerade ist, ist:

$$\cos 6 \vartheta = \cos^6 \vartheta - 15 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta + 15 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta - \sin^6 \vartheta. \quad (7a)$$

Die einzige homogene ungerade Funktion sechster Ordnung, die die Periodizität  $120^\circ$  besitzt, ist

$$\sin 6 \vartheta = 6 \cos^5 \vartheta \sin \vartheta - 20 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta + 6 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta. \quad (7b)$$

Die einzigen geraden bzw. ungeraden homogenen Funktionen achter Ordnung mit der Periodizität  $120^\circ$  sind:

$$\begin{aligned} \cos 6 \vartheta &= (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \cos 6 \vartheta = \cos^8 \vartheta - 14 \cos^6 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 14 \cos^2 \vartheta \sin^6 \vartheta - \sin^8 \vartheta. \end{aligned} \quad (7c)$$

$$\begin{aligned} \sin 6 \vartheta &= (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \sin 6 \vartheta = 6 \cos^7 \vartheta \sin \vartheta - 14 \cos^5 \vartheta \sin^3 \vartheta \\ &\quad - 14 \cos^3 \vartheta \sin^5 \vartheta + 6 \cos \vartheta \sin^7 \vartheta. \end{aligned} \quad (7d)$$

---

\*) Wenn  $n$  gerade.

Vergleicht man diese Funktionen mit (4) und (5), so erkennt man, daß in den dortigen Fourier-Entwicklungen nur folgende Glieder auftreten können:

$$\begin{aligned} A &= (a_2 H^4 + a'_2 H^6) \cos 6 \vartheta = a_2 (\cos^6 \vartheta - 15 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 15 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta - \sin^6 \vartheta) H^4 + a'_2 (\cos^8 \vartheta - 14 \cos^6 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 14 \cos^2 \vartheta \sin^6 \vartheta - \sin^8 \vartheta) H^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (b_2 H^4 + b'_2 H^6) \sin 6 \vartheta = b_2 (6 \cos^5 \vartheta \sin \vartheta - 20 \cos^3 \vartheta \sin^3 \vartheta \\ &\quad + 6 \cos \vartheta \sin^5 \vartheta) H^4 + b'_2 (6 \cos^7 \vartheta \sin \vartheta - 14 \cos^5 \vartheta \sin^3 \vartheta \\ &\quad - 14 \cos^3 \vartheta \sin^5 \vartheta + 6 \cos \vartheta \sin^7 \vartheta) H^6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (c_2 H^4 + c'_2 H^6) \cos 6 \vartheta = c_2 (\cos^6 \vartheta - 15 \cos^4 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad + 15 \cos^2 \vartheta \sin^4 \vartheta - \sin^6 \vartheta) H^4 + c'_2 (\cos^8 \vartheta - 14 \cos^6 \vartheta \sin^2 \vartheta \\ &\quad - 14 \cos^2 \vartheta \sin^6 \vartheta + \sin^8 \vartheta) H^6. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit den entsprechenden Gliedern von (4) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} R_{11}^{40} &= -R_{22}^{04} = a_2, \quad R_{11}^{22} + R_{22}^{40} + 2 R_{12}^{31} = -(R_{11}^{04} + R_{22}^{22} + 2 R_{12}^{13}) \\ &= -15 a_2; \\ R_{11}^{40} - R_{12}^{31} - R_{22}^{40} &= R_{11}^{04} + R_{12}^{13} - R_{22}^{04} = 6 b_2, \\ R_{11}^{22} + R_{12}^{31} - R_{12}^{13} - R_{22}^{22} &= -20 b_2, \quad R_{22}^{40} = -R_{11}^{04} = c_2, \\ R_{11}^{40} + R_{22}^{22} - 2 R_{12}^{31} &= -(R_{11}^{22} + R_{22}^{04} - 2 R_{12}^{13}) = -15 c_2; \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_{11}^{60} &= -P_{22}^{06} = a'_2, \quad P_{11}^{42} + P_{22}^{60} + 2 P_{12}^{51} = -(P_{11}^{06} + P_{22}^{24} + 2 P_{12}^{15}) \\ &= -14 a'_2, \quad P_{22}^{60} = -P_{11}^{06} = c'_2, \\ P_{11}^{60} - P_{22}^{60} - P_{12}^{51} &= P_{11}^{06} + P_{12}^{15} - P_{22}^{06} = 6 b'_2, \\ P_{11}^{42} + P_{12}^{51} - P_{12}^{33} - P_{22}^{42} &= P_{11}^{24} + P_{12}^{33} - P_{12}^{15} - P_{22}^{24} = -14 b'_2, \\ P_{11}^{60} + P_{22}^{42} - 2 P_{12}^{51} &= -(P_{11}^{24} + P_{22}^{06} - 2 P_{12}^{15}) = -14 c'_2, \\ P_{11}^{42} + P_{22}^{24} - 2 P_{12}^{33} &= 0, \quad P_{11}^{24} + P_{22}^{42} + 2 P_{12}^{33} = 0. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen führt zu folgenden Ergebnissen:

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -c_2 = b_2, \quad R_{11}^{40} = -R_{22}^{04} = R_{11}^{04} = -R_{22}^{40} = a_2, \\ R_{11}^{22} &= -R_{22}^{22} = -6 a_2, \quad R_{12}^{31} = -R_{12}^{13} = -4 a_2 \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

und

$$\left. \begin{aligned} a'_2 - c'_2 &= 2 b'_2, \quad P_{12}^{51} = -P_{12}^{15} = -2 (a'_2 - c'_2), \quad P_{11}^{60} = -P_{22}^{06} = a'_2, \\ P_{22}^{60} &= -P_{11}^{06} = c'_2, \quad P_{11}^{42} = -P_{22}^{24} = -10 a'_2 - 5 c'_2, \\ P_{22}^{42} &= -P_{11}^{24} = -5 a'_2 - 10 c'_2, \quad P_{12}^{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Für longitudinale Magnetisierung ist  $\varphi = 0$ . Als Widerstandsänderung folgt dann nach (3) und (2):

$$\Delta w = P_t + (a_2 H^4 + a'_2 H^6) \cos 6 \vartheta.$$

D. h. die longitudinale Widerstandsänderung von Kristallen der Übergangsreihe  $P_1^{||} - P_1^{\perp}$  zeigt hinsichtlich der Abhängigkeit von der Orientierung des Stromes und Magnetfeldes gegenüber den Nebenachsen eine Sechszähligkeit entsprechend dem experimentellen Befund. Diese Sechszähligkeit wird möglich schon durch das Auftreten der vierten Potenz in der magnetischen Feldstärke. Damit in Übereinstimmung steht das Auftreten dieses Effektes schon bei relativ sehr niedrigen magnetischen Feldstärken (etwa 1000 AW/cm).

Bei transversaler Magnetisierung ist  $\varphi = 90^\circ$  und es folgt:

$$\Delta w = P_t + (c_2 H^4 + c'_2 H^6) \cos 6 \vartheta.$$

Auch die transversale Widerstandsänderung von Kristallen der Übergangsreihe  $P_1^{||} - P_1^{\perp}$ , das Magnetfeld senkrecht zur Hauptachse, zeigt hinsichtlich der Orientierung des Magnetfeldes oder des Stromes gegenüber einer Nebenachse eine Sechszähligkeit, entsprechend dem Experiment. Diese Sechszähligkeit ist ebenfalls möglich beim Auftreten der vierten Potenz in der magnetischen Feldstärke und tritt dementsprechend schon bei kleinen Magnetfeldern (größer als 1000 AW/cm) auf.

Nun werde bei einem  $P_1^{||}$ -Kristall der Winkel  $\varphi$  zwischen Strom und Magnetfeld verändert. Für die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von dem Winkel  $\varphi$  folgt ( $\varphi = \vartheta$ ):

$$\begin{aligned} \Delta w &= P_t \cos^2 \varphi + P_t \sin^2 \varphi + a_2 H^4 \cos 6 \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ &\quad + a_2 H^4 \sin 6 \varphi \sin 2 \varphi + [P_{11}^{60} \cos^6 \varphi + P_{11}^{42} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + P_{11}^{24} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + P_{11}^{06} \sin^6 \varphi] H^6, \end{aligned}$$

oder nach (8b):

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{P_t + P_t}{2} + \frac{P_t - P_t}{2} \cos 2 \varphi + a_2 H^4 \cos 4 \varphi + [a'_2 \cos^6 \varphi \\ &\quad - (10 a'_2 + 5 c'_2) \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + (5 a'_2 + 10 c'_2) \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi \\ &\quad - c'_2 \sin^6 \varphi] H^6. \end{aligned}$$

Es lässt sich setzen:

$$\begin{aligned} a'_2 \cos^6 \varphi - (10 a'_2 + 5 c'_2) \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + (5 a'_2 + 10 c'_2) \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi \\ - c'_2 \sin^6 \varphi = A'_0 + A'_1 \cos 2 \varphi + A'_2 \cos 4 \varphi + A'_3 \cos 6 \varphi. \end{aligned}$$

Führt man die Rechnung durch, so folgt:

$$A'_3 = \frac{a'_2 + c'_2}{2}; \quad A'_2 = \frac{a'_2 - c'_2}{2}; \quad A'_1 = A'_0 = 0.$$

Somit wird schließlich:

$$\Delta w = \frac{P_l + P_t}{2} + \frac{P_l - P_t}{2} \cdot \cos 2\varphi + \left( a_2 H^4 + \frac{a'_2 - c'_2}{2} H^6 \right) \cos 4\varphi \\ + \frac{a'_2 + c'_2}{2} H^6 \cos 6\varphi.$$

Analog folgt für  $P_1^\perp$ -Kristalle:

$$\Delta w = \frac{P_l + P_t}{2} + \frac{P_e - P_t}{2} \cdot \cos 2\varphi - \left( a_2 H^4 + \frac{a'_2 - c'_2}{2} H^6 \right) \cos 4\varphi \\ - \frac{a'_2 + c'_2}{2} H^6 \cos 6\varphi.$$

Genau diese Entwicklung der Widerstandsänderung nach Vielfachen von  $2\varphi$  hat Stierstadt an seinen  $P_1^\parallel$ - und  $P_1^\perp$ -Kristallen durchgeführt (Stierstadt I). Er setzt  $\Delta w/w = A_0 + A_1 \cos 2\varphi + A_2 \cos 4\varphi + A_3 \cos 6\varphi$ . Seine Ergebnisse bei 3000 AW/cm sind:

Tabelle 1.

	$K 248/31 P_1^\perp$	$K 248/51 P_1^\parallel$		$K 248/31 P_1^\perp$	$K 248/51 P_1^\parallel$
$A_0$	7,7	9,2	$A_2$	1,5	- 1,16
$A_1$	- 1,35	- 1,7	$A_3$	0,12	- 0,15

und an einem anderen Kristallpaar (Bi + 0,03 % Sn):

Tabelle 2.

	$K 293/21 P_1^\perp$	$K 293/31 P_1^\parallel$		$K 293/21 P_1^\perp$	$K 293/31 P_1^\parallel$
$A_0$	6,6	7,5	$A_2$	0,87	- 0,81
$A_1$	- 1,15	- 1,5	$A_3$	0,81	- 0,1

Eine wichtige Folgerung der theoretischen Betrachtungen ist die Existenz des Gliedes  $\cos 4\varphi$ . Dieses Glied ergibt sich automatisch, wenn man die höheren Potenzen in der magnetischen Feldstärke berücksichtigt. Es tritt demnach gleichzeitig mit den oben erwähnten Sechszähligkeiten bei longitudinaler und transversaler Magnetisierung auf, also bei magnetischen Feldern oberhalb 1000 AW/cm. Auch quantitative Schlüsse lassen sich ziehen. Aus den obigen Formeln für den  $P_1^\parallel$ - und  $P_1^\perp$ -Kristall folgt, daß der Entwicklungskoeffizient  $A_2$  in  $P_1^\parallel$ - und  $P_1^\perp$ -Kristallen entgegengesetzt gleich groß sein soll. Das gleiche gilt für den Entwicklungskoeffizienten  $A_3$ . Die erste Folgerung ist, wie man aus Tabelle 1 und 2

ersieht, ganz gut erfüllt, die zweite dagegen in Tabelle 2 sehr viel schlechter. Tatsächlich liegt an dieser Stelle in Stierstadt I ein Druckfehler vor, wie ein Vergleich mit dem Manuskript ergab. Der richtige Wert von  $A_3$  für den  $P_1^\perp$ -Kristall in Tabelle 2 ist nicht 0,81, sondern 0,11. Damit ist die geforderte Beziehung ausgezeichnet erfüllt.

Weiter dürfen sich die Entwicklungskoeffizienten  $A_0$  bei  $P_1^\parallel$ - und  $P_1^\perp$ -Kristallen nicht unterscheiden. Ebenso die Koeffizienten  $A_1$ . Diese Forderung ist, allerdings weniger gut in Tabelle 1, innerhalb der Fehlergrenzen erfüllt.

Die quantitativen Folgerungen sind unabhängig davon, daß wir nur bis zur sechsten Ordnung in der magnetischen Feldstärke gingen, wie noch gezeigt werden soll. Unter Verwendung von (5), den Ergebnissen des § 3, lautet (3) allgemein:

$$\Delta w = (P_t + \alpha_1 \cos 6\vartheta + \alpha_2 \cos 12\vartheta + \alpha_3 \cos 18\vartheta + \dots) \cos^2 \varphi + 2(\beta_1 \sin 6\vartheta + \beta_2 \sin 12\vartheta + \dots) \sin \varphi \cos \varphi + (P_t + \gamma_1 \cos 6\vartheta + \gamma_2 \cos 12\vartheta + \dots) \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Die  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  können Funktionen beliebig hoher Ordnung in der magnetischen Feldstärke sein.

Für den  $P_1^\parallel$ -Kristall ist  $\varphi = \vartheta$ . Wir setzen die Fourier-Zerlegung an:  
 $\Delta w = A_0 + A_1 \cos 2\varphi + A_2 \cos 4\varphi + A_3 \cos 6\varphi + \dots$ . Die Fourier-Koeffizienten bestimmen sich in der üblichen Weise:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Delta w \cdot d\varphi, \quad A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Delta w \cdot \cos 2m\varphi d\varphi \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Die Rechnung ergibt:

$$A_0 = \frac{P_t + P_t}{2}, \quad A_1 = \frac{P_t - P_t}{2}, \quad A_2 = \frac{\alpha_1 + 2\beta_1 - \gamma_1}{4}, \quad A_3 = \frac{\alpha_1 + \gamma_1}{2},$$

allgemein:

$$\left. \begin{aligned} A_{3i-1} &= \frac{\alpha_i + 2\beta_i - \gamma_i}{4}, \\ A_{3i} &= \frac{\alpha_i + \gamma_i}{2}, \\ A_{3i+1} &= \frac{\alpha_i - 2\beta_i - \gamma_i}{4}. \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Für einen  $P_1^\perp$ -Kristall ist  $\vartheta = \varphi + 90^\circ$ . Dementsprechend wird au: (9)

$$\Delta w = (P_t - \alpha_1 \cos 6\varphi + \alpha_2 \cos 12\varphi - \dots) \cos^2 \varphi + 2(-\beta_1 \sin 6\varphi + \beta_2 \sin 12\varphi - \dots) \sin \varphi \cos \varphi + (P_t - \gamma_1 \cos 6\varphi + \gamma_2 \cos 12\varphi - \dots) \sin^2 \varphi.$$

Die Fourier-Zerlegung liefert in diesem Fall:

$$A_0 = \frac{P_l + P_t}{2}, \quad A_1 = \frac{P_l - P_t}{2}, \quad A_2 = -\frac{\alpha_i + 2\beta_i - \gamma_i}{4}, \quad A_3 = \frac{\alpha_i + \gamma_i}{2},$$

allgemein:

$$\left. \begin{array}{l} A_{3(i-1)} = (-1)^i \frac{\alpha_i + 2\beta_i - \gamma_i}{4}, \\ A_{3i} = (-1)^i \frac{\alpha_i + \gamma_i}{2}, \\ A_{3(i+1)} = (-1)^i \frac{\alpha_i - 2\beta_i - \gamma_i}{4}. \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3 \text{ usw.})$$

Durch Vergleich mit dem entsprechenden Ergebnis bei  $P_1^1$ -Kristallen folgt:

- a) Die Koeffizienten  $A_0$  und  $A_1$  sind für beide Kristalle gleich.
- b) Die Koeffizienten  $A_{3(i-1)}$ ,  $A_{3i}$ ,  $A_{3(i+1)}$  sind für beide Kristalle gleich bzw. entgegengesetzt gleich, je nachdem  $i$  gerade oder ungerade ist.

### *S 5. Strom parallel der Hauptachse.*

a) *Magnetfeld stets senkrecht zur Hauptachse (Fall von Schubnikow und de Haas).* Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des § 3 folgt mit  $H_1 = H \cos \varphi$ ,  $H_2 = \sin \varphi$ ,  $H_3 = 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta w = & \text{Const.} + (R_{33}^{40} \cos^4 \varphi + R_{33}^{22} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + R_{33}^{04} \sin^4 \varphi) H^4 \\ & + (P_{33}^{60} \cos^6 \varphi + P_{33}^{42} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + P_{33}^{24} \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi \\ & + P_{33}^{06} \sin^6 \varphi) H^6. \end{aligned}$$

Außer der konstanten Funktion  $A (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2$  gibt es keine in  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  homogene Funktion vierter Ordnung, die die Periodizität  $120^\circ$  hätte. Die allgemeinste homogene Funktion sechster Ordnung in  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ , die der Decktransformation der dreizähligen Achse genügt, ist  $A' (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^3 + B' \cos 6 \varphi$ . Das Glied mit  $\cos 6 \varphi$  entspricht der von Schubnikow und de Haas (l. c.) und auch von Stierstadt<sup>1)</sup> gefundenen Sechszähligkeit. Zum Unterschied gegenüber den in § 4 gefundenen Sechszähligkeiten ist diese Sechszähligkeit erst durch die Glieder sechster Ordnung in der magnetischen Feldstärke möglich, was damit in Zusammenhang gebracht werden kann, daß dieser Effekt erst bei magnetischen Feldern oberhalb etwa 2500 AW/cm auftritt<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> Stierstadt II. — <sup>2)</sup> Stierstadt VI.

Je größer das magnetische Feld, um so höhere Potenzen in der magnetischen Feldstärke wird man berücksichtigen müssen. Die Folge davon ist, daß bei der Widerstandsänderung nicht nur Glieder mit  $\cos 6\varphi$ , sondern auch Glieder mit  $\cos 12\varphi$ ,  $\cos 18\varphi$ ,  $\cos 24\varphi$  usw. auftreten werden. Daß dies in Wirklichkeit so ist, zeigen die Versuche von Schubnikow und de Haas (l. c.) an Bi. Bei einer Feldstärke von 30000 Gauß und der Temperatur  $14,15^0$  abs. mußte die Fourier-Zerlegung nach Vielfachen von  $6\varphi$  bis zum Gliede  $36\varphi$  getrieben werden. Ähnliche Ergebnisse zeigten auch Versuche von de Haas und Blom an Ga-Kristallen<sup>1)</sup>.

b) *Winkel zwischen Strom und Magnetfeld veränderlich.* Derartige Versuche sind in Stierstadt I durchgeführt. Es werden  $P_3$ -Kristalle im Magnetfeld so gedreht, daß das Magnetfeld das eine Mal immer in der  $x_1$ - $x_3$ -Ebene bleibt ( $P_3^{||}$ ), das andere Mal in der  $x_2$ - $x_3$ -Ebene ( $P_3^\perp$ ). Das Auffallende am experimentellen Ergebnis für die Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Winkel  $\varphi$  zwischen Strom und Magnetfeld ist die Unsymmetrie bei  $P_3^\perp$  um  $\varphi = 0$ , im Gegensatz zum Fall  $P_3^{||}$ , wo um  $\varphi = 0$  vollkommene Symmetrie herrscht. Für den  $P_3^{||}$ -Kristall folgt nach § 3 allgemein ( $H_3 = H \cos \varphi$ ,  $H_1 = H \sin \varphi$ ):

$$\begin{aligned}\Delta w = & P'_t \cos^2 \varphi + P'_t \sin^2 \varphi + (R_{33}^{00} \cos^4 \varphi + R_{33}^{20} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ & + R_{33}^{40} \sin^4 \varphi) H^4 + (P_{33}^{00} \cos^6 \varphi + P_{33}^{20} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi \\ & + P_{33}^{40} \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi + P_{33}^{60} \sin^6 \varphi) H^6.\end{aligned}$$

Man erkennt ohne Rechnung, daß die Koeffizienten  $R_{33}^{00}$  und  $P_{33}^{00}$  trotz der Kristallsymmetrien beliebige Werte annehmen können, ebenso steht es mit den Koeffizienten  $R_{33}^{20}$  und  $P_{33}^{20}$ . Diese Glieder verursachen bei der Fourier-Zerlegung von  $\Delta w$  nach Vielfachen von  $2\varphi$  die Glieder  $\cos 4\varphi$  und  $\cos 6\varphi$ , die von Stierstadt gefunden wurden. Die Widerstandsänderung ist symmetrisch um  $\varphi = 0$ , wie man leicht erkennt.

Anders werden die Verhältnisse beim  $P_3^\perp$ -Kristall. Hier ist  $H_3 = H \cos \varphi$ ,  $H_2 = H \sin \varphi$ ,  $H_1 = 0$ . Es wird:

$$\begin{aligned}\Delta w = & P'_t \cos^2 \varphi + P'_t \sin^2 \varphi + (R_{33}^{00} \cos^4 \varphi + R_{33}^{01} \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ & + R_{33}^{02} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + R_{33}^{03} \cos \varphi \sin^3 \varphi + R_{33}^{04} \sin^4 \varphi) H^4 \\ & + (P_{33}^{00} \cos^6 \varphi + P_{33}^{01} \cos^5 \varphi \sin \varphi + \dots) H^6.\end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß  $R_{33}^{01}$  und  $P_{33}^{01}$  verschwinden müssen. Nicht gilt dies aber für  $R_{33}^{02}$ ,  $R_{33}^{03}$ ,  $R_{33}^{04}$ ,  $P_{33}^{02}$ ,  $P_{33}^{03}$ , ... Damit ist aber die Unsymmetrie der Widerstandsänderung vom Winkel  $\varphi$  um  $\varphi = 0$  dargetan.

<sup>1)</sup> W. J. de Haas u. J. W. Blom, Comm. Leiden 229b u. 231b.

Zum Unterschied gegenüber den bei  $P_2^\perp$  in Stierstadt I und  $P_1^{\parallel\parallel}$  in Stierstadt II erhaltenen Unsymmetrien um  $\varphi = 0$  ist die hier behandelte ein Effekt höherer Ordnung, d. h. sie tritt im Bereich quadratischer Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Magnetfeld nicht auf.

### § 6. Magnetfeld in Richtung der Hauptachse. Strom senkrecht dazu.

Es ist:  $H_1 = H_2 = J_3 = 0$ . Das Ohmsche Gesetz lautet (nur die Glieder vierter und sechster Ordnung in  $H$ ):

$$E_1 = R_{11}^{00} J_1 H_3^4 + R_{12}^{00} J_2 H_3^4 + P_{11}^{00} J_1 H_3^6 + P_{12}^{00} J_2 H_3^6,$$

$$E_2 = R_{22}^{00} J_2 H_3^4 + R_{12}^{00} J_1 H_3^4 + P_{22}^{00} J_2 H_3^6 + P_{21}^{00} J_1 H_3^6.$$

Nach den Bedingungen des § 3 für die zweizählige Achse in  $x_1$ -Richtung ist  $R_{12}^{00} = R_{21}^{00} = P_{12}^{00} = P_{21}^{00} = 0$ . Ist  $\varphi$  der Winkel des Stromes mit der  $x_1$ -Achse, so folgt für die Widerstandsänderung:

$$\Delta w = \frac{E_1 \cdot \cos \varphi + E_2 \cdot \sin \varphi}{|J|}$$

$$= (R_{11}^{00} H^4 + P_{11}^{00} H^6) \cos^2 \varphi + (R_{22}^{00} H^4 + P_{22}^{00} H^6) \sin^2 \varphi.$$

Die einzige Funktion zweiter Ordnung in  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$ , die bei einer Drehung um  $120^\circ$  ihren Wert nicht ändert, ist  $A (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)$ . Durch Koeffizientenvergleichung folgt:

$$R_{11}^{00} = R_{22}^{00}, \quad P_{11}^{00} = P_{22}^{00}.$$

Der Widerstand wird also wohl geändert durch ein Magnetfeld in Richtung der Hauptachse, aber so, daß im Magnetfeld trotzdem noch Kreissymmetrie um die trigonale Achse besteht.

Es läßt sich leicht einsehen, daß diese Folgerung unabhängig davon ist, daß die Näherung nur bis zur sechsten Ordnung in der magnetischen Feldstärke getrieben wurde, sondern ganz allgemein richtig sein muß. Die wesentliche Voraussetzung dabei ist nur das Ohmsche Gesetz.

Vom Experiment scheint diese allgemeine Folgerung der Theorie nicht bestätigt zu sein, wenigstens nicht oberhalb etwa 2500 AW/cm. Experimentell findet Stierstadt zwischen  $P_1^{\parallel\parallel}$  und  $P_1^\perp$  einen Unterschied bei transversaler Magnetisierung, das Magnetfeld in Richtung der Hauptachse. Allerdings hat er keine Übergangstypen gemessen, sondern nur die beiden Grenzfälle  $P_1^{\parallel\parallel}$  und  $P_1^\perp$ . Eine Schwierigkeit, die die Sicherheit der Aussagen sehr beeinträchtigt, liegt darin, daß man notwendig an verschiedenen Kristallindividuen messen muß.

### Zusammenfassung.

Durch Stierstadt VI wird neues Licht auf die magnetische Widerstandsänderung bei kleinen Feldern geworfen. Wichtige theoretische Folgerungen werden bestätigt, und eine genauere zahlenmäßige Bestimmung der quadratischen Widerstandsänderungsparameter  $R_{iklm}$  ist durchgeführt. Abweichungen vom quadratischen Gesetz treten bei Bi und Zimmertemperatur schon bei rund 1000 AW/cm auf.

Es wird dann die Abhängigkeit der Widerstandsänderung von der kristallographischen Orientierung von Strom und Magnetfeld bei höheren Magnetfeldern durch Berücksichtigung höherer Potenzen in der magnetischen Feldstärke im verallgemeinerten Ohmschen Gesetz untersucht. Es zeigt sich, daß man nur bis zur sechsten Ordnung in der magnetischen Feldstärke zu gehen braucht, damit folgende Abweichungen vom Verhalten bei kleinen Feldern auftreten:

#### 1. Die Sechsähnlichkeiten

- a) bei longitudinaler und transversaler Magnetisierung von Kristallen der Übergangsserie  $P_1^{\parallel} - P_1^{\perp}$ ;
- b) bei transversaler Magnetisierung von  $P_3$ -Kristallen (Fall von Schubnikow und de Haas).

2. Die höheren Fourier-Koeffizienten  $A_2, A_3$  bei  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen in Stierstadt I. Die quantitativen Folgerungen, daß  $A_0$  und  $A_1$  bei  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen gleich und  $A_2$  und  $A_3$  bei beiden Kristallen negativ gleich sein müssen, sind durch die Stierstadtschen Versuche innerhalb der Versuchsfehler bestätigt. Diese Folgerungen sind unabhängig davon, wie weit die Entwicklung nach Potenzen der magnetischen Feldstärke getrieben ist.

3. Die höheren Fourier-Koeffizienten  $A_2, A_3$  bei  $P_2^{\parallel}$ - und  $P_3^{\parallel}$ -Kristallen in Stierstadt I.

4. Die Unsymmetrie der Abhängigkeit der Widerstandsänderung vom Winkel  $\varphi$  zwischen Strom und Magnetfeld um  $\varphi = 0$  bei  $P_3^{\perp}$ -Kristallen in Stierstadt I.

*Nicht* verstehen läßt sich dagegen das verschiedene Verhalten von  $P_1^{\parallel}$ - und  $P_1^{\perp}$ -Kristallen bei transversaler Magnetisierung, das Magnetfeld in Richtung der Hauptachse. Es ergibt sich in diesem Fall auch im Magnetfeld Kreissymmetrie um die trigonale Achse. Diese Aussage ist unabhängig von dem Grad der Entwicklung nach Potenzen der magnetischen Feldstärke, muß also auch für starke Magnetfelder gelten.

## Darstellung der Fresnelschen Beugungerscheinungen mit Wasseroberflächenwellen und Ultraschallwellen.

Von **E. Grossmann** in Quito und **E. Hiedemann** in Köln.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Mai 1935.)

An einem Schnitt durch das berechnete Schallfeld einer kreisförmigen Kolbenmembran wird gezeigt, daß die Wellenflächen erheblich von der Gestalt abweichen, die man gewöhnlich nach dem Huygensschen Prinzip konstruiert. Sodann werden einige Versuche mit Ultraschallwellen und Wasseroberflächenwellen besprochen. Die für das Wellenfeld der Kolbenmembran charakteristischen Verhältnisse sind nicht nur vor der Stirnfläche eines als Kolbenmembran wirkenden Quarzstabes, sondern auch im Wellenfeld von Spaltöffnungen gut zu beobachten. Die Versuche sind teils zur Demonstration der Beugungerscheinungen recht geeignet.

### *Einleitung.*

Zur Darstellung der Wellenflächen (= Flächen gleicher Phase) hinter einer beugenden Öffnung konstruiert man gewöhnlich Hüllflächen um Kugeln, deren Mittelpunkte in der beugenden Öffnung liegen (Huyghensches Prinzip). Auf dieselbe Weise kann man auch die Wellenflächen vor einer Kolbenmembran darstellen. Bei der numerischen Auswertung der von Backhaus<sup>1)</sup> entwickelten Formeln für das Schallfeld einer kreisförmigen Kolbenmembran in einer starren Wand fand Grossmann, daß die nach dieser exakten Rechnung konstruierten Wellenflächen erheblich von den Hüllflächen um äquiradiale Kugeln (deren Mittelpunkte auf der Membranoberfläche liegen) abweichen<sup>2)</sup>.

In der vorliegenden Arbeit wird an einigen Versuchen mit Ultraschallwellen und Wasseroberflächenwellen gezeigt, daß die für das Wellenfeld einer Kolbenmembran berechneten Verhältnisse nicht nur im Schallfeld einer Kolbenmembran, sondern praktisch auch im Schallfeld einer beugenden Öffnung von entsprechender Gestalt beobachtet werden können.

Die Versuchsanordnungen sind zum Teil schon an anderer Stelle beschrieben<sup>3)</sup>, so daß darauf hier nur kurz eingegangen zu werden braucht. Auch sind zum Teil ähnliche Versuche von anderen Autoren ausgeführt worden. Es ist ferner möglich, daß die beschriebenen Erscheinungen bereits

<sup>1)</sup> H. Backhaus, Ann. d. Phys. **5**, 1—35, 1930. — <sup>2)</sup> Aus der eigentümlichen Gestalt des Schallfeldes vor einer Kolbenmembran erklärt Grossmann die scheinbare Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Entfernung von Sender und Reflektor, die man beim Messen mit dem akustischen Interferometer beobachtet (Phys. ZS. **35**, 83—88, 1934). — <sup>3)</sup> Vgl. die Fußnoten der folgenden Seiten.

beobachtet worden sind. Da wir aber die Eigentümlichkeiten des Wellenfeldes bisher nirgends beschrieben fanden, erscheint es uns angebracht, an dieser Stelle näher darauf einzugehen. Der Beschreibung der Versuche ist eine kurze Behandlung der theoretisch zu erwartenden Erscheinungen vorangestellt.

#### *Theoretische Behandlung.*

Die exakte Berechnung der Verhältnisse bei der Beugung an einer Öffnung in einem Schirm ist mit großen mathematischen Schwierigkeiten verbunden. Nur die von M. J. O. Strutt<sup>1)</sup> für die Beugung an einem unendlich langen Spalt entwickelte Lösung erlaubt eine numerische Auswertung. Doch ist auch diese beschränkt, da bisher die dazu erforderlichen Mathieuschen Funktionen nur so weit tabelliert sind, daß die Beugescheinungen an Spalten, deren Breite  $b \leq \frac{\pi}{2} \lambda$  ist, dargestellt werden können. Diese Werte reichen zum Vergleich mit den in der vorliegenden Arbeit zu besprechenden Experimenten nicht aus.

Das Wellenfeld einer Kolbenmembran ist dem einer Öffnung von gleicher Größe und Gestalt auch bei senkrecht einfallender Welle konstanter Amplitude nicht genau gleich, da die Randbedingungen nicht dieselben sind. Vielmehr entspricht das Wellenfeld der Kolbenmembran den in der klassischen Beugungstheorie von Fresnel und Kirchhoff angesetzten Bedingungen. Nun hat Strutt am Beispiel des unendlich langen Spaltes gezeigt, daß für Aufpunkte sehr großer Entfernung selbst bei einer Spaltbreite von nur  $\lambda/3$  die Abweichung der Kirchhoffschen Lösung von der von ihm entwickelten exakten Lösung nur wenige Prozent beträgt. Es ist daraus zu schließen, daß für Öffnungen, deren Ausmaße größer als  $\lambda$  sind — außer in der allernächsten Nähe der Öffnung —, der Fehler, der durch Nutzung der Formeln für die Kolbenmembran begangen wird, nicht allzu groß ist. Ein quantitativer Vergleich mit den im nächsten Abschnitt zu besprechenden Experimenten ist insofern nicht angängig, als die dort benutzten Öffnungen nicht kreisförmig, sondern rechteckig sind. Bei den Wasseroberflächenwellen nimmt außerdem die Amplitude mit der Tiefe ab. Es muß darum bei einem qualitativen Vergleich bleiben.

Fig. 1 zeigt einen Hauptschnitt durch das Wellenfeld einer kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $R = 1,75 \lambda$ . Die stark ausgezogenen Linien stellen die Flächen gleicher Phase des Druckes (Wellenflächen) dar. Die schwach ausgezogenen Linien verbinden Punkte gleicher Druck-

<sup>1)</sup> M. J. O. Strutt, ZS. f. Phys. **69**, 597—671, 1931.

amplitude  $P$ . Die angeschriebenen Zahlen geben das Verhältnis  $P/P_0$  an, wobei  $P_0$  der Druck ist, der in einem Rohr vom Querschnitt der Membran herrschen würde, wenn die Membran nicht in den freien Halbraum, sondern in dieses Rohr strahlen würde.

Folgendes ist an der Fig. 1 besonders zu beachten:

1. Die Wellenflächen werden in dem Hauptschnitt nicht durch zwei Kreisbögen mit einem geraden Zwischenstück gebildet, sondern durch einen verrundet gebrochenen Linienzug. Die Krümmung der Wellenflächen ist von der Kolbenmembran aus gesehen nicht durchweg konkav, sondern teilweise auch konvex.

2. Die bei der Darstellung der Intensitätsverteilung für Aufpunkte großer Entfernung besonders in Polarkoordinaten charakteristisch hervortretenden Minima und Nebenmaxima sind schon in geringer Entfernung vorhanden, wenn auch weniger scharf ausgeprägt.

3. Die Amplitude auf der Hauptnormalen nimmt mit wachsender Entfernung von der Kolbenmembran nicht kontinuierlich ab, sondern durchläuft Minima und Maxima, bevor sie sich asymptotisch Null nähert.

*Demonstrationsversuche mit Oberflächenwellen.* Zur Demonstration der Ausbreitungsvorgänge von Wellen ist bekanntlich eine Wellenwanne wegen ihrer Einfachheit und Vielseitigkeit besonders geeignet. Wie die folgenden Aufnahmen zeigen, lassen sich damit auch die Fresnelschen Beugungerscheinungen an einem Spalt in sehr einfacher Weise (z. B. als Vorlesungsversuch) demonstrieren. Für die Aufnahmen wurde die neue Demonstrations-Wellenwanne von O. Brandt und H. Freund<sup>1)</sup> benutzt. Der Wellenreger wird dabei mit der Netzfreqenz von 50 Hz betrieben. Die Aufnahmen müssen also mit stroboskopischer Belichtung ausgeführt werden. Für Hörsaal-demonstrationen genügt zu diesem Zwecke die einfache von Brandt

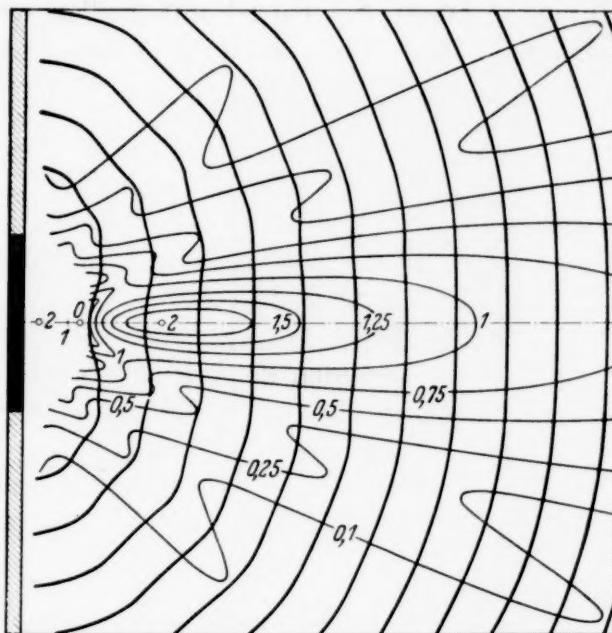


Fig. 1. Wellenfeld vor einer kreisförmigen Kolbenmembran vom Radius  $R = 1,75$ . Etwa  $1/4$ .

<sup>1)</sup> O. Brandt u. H. Freund, ZS. f. Unterr. **47**, 261, 1934.

und Freund (l. c.) beschriebene Stroboskopscheibe. Für photographische Aufnahmen dagegen benutzt man zweckmäßig eine Schlitzscheibe, welche auf der Achse eines Synchronmotors angebracht ist, der ebenfalls vom Wechselstromnetz betrieben wird.

Die Wellenausbreitung hinter einem Spalt wurde bei verschiedenen Spaltbreiten untersucht. Der Spalt wurde dabei in einfachster Weise durch zwei in die Wellenwanne eingesetzte Bleche hergestellt. Unter den Fig. 2 und 3 ist die Spaltbreite in Wellenlängen  $\lambda$  angegeben. Da dieses Verhältnis

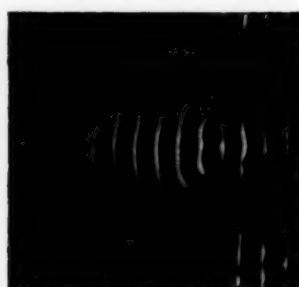


Fig. 2. Wasserwellen. Spaltbreite  $b = 1,5 \lambda$ .



Fig. 3. Wasserwellen. Spaltbreite  $b = 2,8 \lambda$ .

sich nicht genau aus der Photographie erkennen läßt — die Spaltbacken ragen aus der Objektivebene heraus —, wurde jeweils die Wellenlänge und die Spaltbreite unmittelbar gemessen.

Die Fig. 2 ( $b = 1,5 \lambda$ ) und 3 ( $b = 2,8 \lambda$ ) zeigen eine recht befriedigende Übereinstimmung mit der theoretischen Fig. 1. An beiden Aufnahmen kann man sehr gut erkennen, daß die Wellenfronten nicht durch zwei Kreisbögen mit einem geraden Zwischenstück, sondern durch einen verrundet gebrochenen Wellenzug gebildet werden. Auch die Nebenmaxima sind in beiden Figuren deutlich zu erkennen. Eine exakt-quantitative Übereinstimmung mit der theoretischen Figur kann natürlich, wie schon in der theoretischen Behandlung ausgeführt wurde, nicht erwartet werden.

*Versuche mit Ultraschallwellen in Flüssigkeiten.* Da Strutt (l. c.) gezeigt hat, daß für Aufpunkte sehr großer Entfernung die Abweichung der Fresnel-Kirchhoffschen Lösung des Wellenfeldes, welche bei der Kolbenmembran angewendet wird, mit der durch Strutt entwickelten exakten Lösung der Beugung an einem unendlich langen Spalt nur wenige Prozent beträgt, so war es von Interesse, experimentell die Bedingungen möglichst der Voraussetzung der Struttschen Berechnungen anzunähern, also einen im Verhältnis zur Wellenlänge sehr langen Spalt zu verwenden. Das ist bei Wasserwellen offenbar unmöglich; es läßt sich dagegen mit Ultraschallwellen in Flüssigkeiten verhältnismäßig leicht verwirklichen. Zudem erschien

e  
e  
n  
2  
s  
eine Untersuchung des Ultraschallfeldes in einer Flüssigkeit auch im Hinblick auf die von Grossmann (l. c.) gegebene Erklärung für die bei den Messungen mit dem Ultraschallinterferometer auftretenden Abweichungen in der Nähe des Schallquarzes erwünscht.

Zur Ermittlung des Verlaufs der Wellenflächen in einem Ultraschallfeld ist es zweckmäßig, das Schallfeld selbst sichtbar zu machen. Man könnte dazu z. B. eine gewöhnliche Schlierenmethode anwenden. Wesentlich schärfere und lichtstärkere Bilder lassen sich aber mit der von Hiedemann und seinen Mitarbeitern<sup>1)</sup> entwickelten Methode herstellen, über deren Ergebnisse schon mehrfach berichtet worden ist. Diese Methode unterscheidet sich bekanntlich von den üblichen Schlierenmethoden dadurch, daß die regelmäßige Dichteverteilung als eine Art von Abbildungssystem benutzt wird. Im Falle fortschreitender Wellen muß man dabei nach Bachem<sup>2)</sup> ein Hochfrequenz-Kerrzellenstroboskop in den Strahlengang bringen und an den Ultraschallsender anköppeln.

Es möge hier eine kurze Beschreibung der Anordnung genügen<sup>3)</sup>. In einer Küvette von etwa 25 cm Länge und 25 mm lichter Weite wird ein Piezoquarz befestigt, der ebene Ultraschallwellen in der Längsrichtung der Küvette abstrahlt. Paralleles Licht fällt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Schalles ein. Die durch die Ultraschallwellen bewirkte sinusförmige Dichteverteilung wirkt z. B. im Falle einer ebenen Welle ähnlich wie ein System von nebeneinander liegenden Zylinderlinsen, so daß ein paralleles Lichtbündel, das groß gegenüber der Ultraschallwellenlänge ist, zu einem System von Brennlinien im Sinne von Lucas und Biquard<sup>4)</sup> konvergiert. Diese Streifen lassen sich leicht mikrophotographisch aufnehmen. Zur Verhinderung der Bildung stehender Wellen kann z. B. eine Schicht aus stark schallabsorbierendem Material am Ende der Küvette benutzt werden.

Zur Untersuchung des Ultraschallfeldes hinter einem Spalt wurde im Abstand von einigen cm vom Schallquarz ein Metallkeil auf dem Boden der

---

<sup>1)</sup> Ch. Bachem, E. Hiedemann u. H. R. Asbach, Nature **133**, 176, 1934; ZS. f. Phys. **87**, 734, 1934; **88**, 395, 1934; Ch. Bachem u. E. Hiedemann, ebenda **89**, 502, 1934; **91**, 418, 1934; **94**, 68, 1935; E. Hiedemann u. N. Seifen, ebenda **91**, 413, 1934; E. Hiedemann, H. R. Asbach u. K. H. Hoesch, Naturwissenschaft. **22**, 465, 1934; ZS. f. Phys. **90**, 322, 1934. — <sup>2)</sup> Ch. Bachem, ZS. f. Phys. **87**, 738, 1934. — <sup>3)</sup> Für die Einzelheiten der Anordnung kann auf die eben zitierten Arbeiten hingewiesen werden, sowie auf eine demnächst erscheinende Veröffentlichung von Ch. Bachem (Dissertation Köln 1935), in welcher auf die experimentellen Einzelheiten und die Theorie der Methode ausführlich eingegangen wird. — <sup>4)</sup> R. Lucas u. P. Biquard, Journ. de phys. et le Radium **3**, 410, 1932.

Küvette angebracht. Ein zweiter Metallkeil wurde mittels eines geeigneten Halters dem unteren Keil genähert. Die Schneiden der Metallkeile lagen in einer vertikalen Ebene parallel zur Richtung des zur Untersuchung benutzten parallelen Lichtbündels. Der so gebildete Spalt hatte eine Länge von über 60 Ultraschallwellenlängen  $\lambda$  und eine Breite von angenähert  $2\lambda$ .

Leider stieß die Verwendung eines aus dünnen Platten gebildeten scharfen Spaltes auf Schwierigkeiten, da die Spaltbacken schallundurchlässig sein mußten. Wurde die Dicke der Platten auch so gewählt, daß bei ihr für die benutzte Ultraschallwellenlänge ein Minimum der Durchlässigkeit im Sinne von Rayleigh vorhanden war<sup>1)</sup>, so waren dünne Platten trotzdem nicht genügend undurchlässig, was wohl auf Schwingungen der ganzen Platte zurückzuführen war. Wurden dicke Platten verwendet, so wurde der Spalt zu einem Kanal und es trat dann eine solche Verzerrung der Wellenfront durch Wandeffekte im Kanal<sup>2)</sup> auf, daß die Verhältnisse nicht mehr den theoretischen Voraussetzungen entsprachen. Diese Schwierigkeiten führten zur oben berichteten Verwendung von keilförmigen Spaltbacken. Scharf zugespitzte Keile durften ebenfalls nicht verwendet werden, da sonst an der Keilspitze in regelmäßigen Abständen Maxima der Durchlässigkeit auftreten, und der durchgelassene Ultraschall sich dem Beugungsbild am Spalt überlagert. Es wurden daher schließlich Keile mit abgeschnittenen Schneiden als Spaltbacken verwendet.

Die Fig. 4 zeigt das Ultraschallfeld hinter einem solchen Spalt. Die Fronten der von links ankommenden Schallwelle sind in der Nähe des Spaltes sehr stark gestört. Erstens durch Reflexion der Schallwellen an den zur Schallrichtung geneigten Spaltbacken, sowie durch infolge davon auftretende weitere Reflexionen an Küvettenboden und Flüssigkeitsoberfläche. Zweitens aber auch dadurch, daß vom Spalt auch nach rückwärts ein Beugungsbild ausgeht. Da es aber hier nur auf das Wellenfeld hinter dem Spalt ankommt, ist dieser Schönheitsfehler nicht wichtig. Man kann auch an dieser Aufnahme sehr deutlich erkennen, daß die Form der Wellenflächen

<sup>1)</sup> Hierbei bewährte sich die optische Methode, welche von E. Hiedemann und H. R. Asbach, Phys. ZS. **34**, 734, 1933 zur Ermittlung der Wandstärken maximaler Durchlässigkeit für Ultraschall und damit auch zur Bestimmung von Ultraschallgeschwindigkeiten angegeben worden ist. — <sup>2)</sup> Optische Untersuchungen des Schallfeldes in engen Kanälen, insbesondere bei plötzlichen Änderungen der Richtung und des Querschnitts des Kanals, sind von dem zuletzt genannten Verfasser gemeinsam mit H. R. Asbach in Angriff genommen worden und es wird bald darüber berichtet werden, wie auch über neue Untersuchungen, welche die oben genannten Schwierigkeiten durch eine andere Anordnung vermeiden. Es sei übrigens bemerkt, daß H. R. Asbach an den Versuchen zur Aufnahme der Fig. 4 mitgearbeitet hat.

der theoretischen Berechnung entspricht. Die Rückkrümmung in der Wellenfront ist sehr gut zu sehen.

*Staubfiguren vor einem Spalt.* Die eben behandelten Versuche sind in besonderem Maße zur Sichtbarmachung der *Wellenflächen* geeignet. Es sei anschließend noch ein Versuch zur Darstellung der *AmplitudensVerteilung* in der Nähe einer beugenden Öffnung (oder einer Kolbenmembran) beschrieben<sup>1)</sup>.

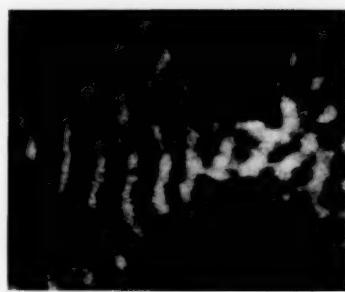


Fig. 4. Ultraschallwelle in Xylol. Frequenz 3000 kHz.  
Spaltbreite  $\approx 2\lambda$ .

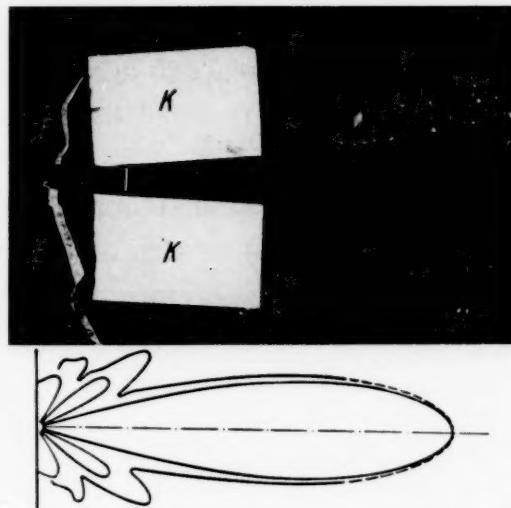


Fig. 5. Staubfigur vor einem Spalt der Breite 2,65. Frequenz 100 kHz. Darunter zum Vergleich die Umrandung der staubfreien Fläche und die Richtcharakteristik.

Auf eine Platte aus glattem Isoliermaterial<sup>2)</sup> legt man einen Piezoquarzstab, der so aus dem Kristall geschnitten ist, daß seine strahlenden Flächen als Kolbenmembranen angesehen werden können ( $71^0$ -Quarz). Vor einer der beiden Stirnflächen bildet man aus zwei Klötzchen einen Spalt oder Kanal veränderlicher Breite (vgl. Fig. 5). Sodann bestreut man die Fläche vor der Spaltöffnung mit Lycopodiumpulver. Beim Erregen des Quarzes wird der Staub vor der Spalt- oder Kanalöffnung fortgeblasen. Unter der Annahme, daß der Staub nur dem Einfluß des Schallstrahlungsdruckes (der dem Quadrat des Schallwechseldruckes proportional ist) und der Reibung an der Grundplatte unterliegt, müßte vor der Spaltöffnung eine Fläche staubfrei geblasen werden, deren Begrenzung durch eine Kurve gleicher Schalldruckamplitude gegeben ist<sup>3)</sup>). Daß das in der Tat weitgehend der Fall ist,

<sup>1)</sup> Die Anordnung ist schon früher von E. Grossmann, Ann. d. Phys. **13**, 688, 1932 und von H. Straubel, Phys. ZS. **32**, 379, 1931 benutzt worden. —

<sup>2)</sup> Man kann auch lichtempfindliches Papier verwenden. — <sup>3)</sup> Auch wenn man annimmt, daß nur solche Staubteilchen vom Schallstrahlungsdruck verschoben werden können, deren Haftung an der Unterlage durch den Schallwechseldruck überwunden worden ist, ist die vom Staub entblößte Fläche von einer Kurve gleichen Schalldruckes begrenzt.

zeigt ein Vergleich der Kurven 0,1 oder 0,25 der Fig. 1 mit der Fig. 5. Diese wurde an einem Spalt der Breite 9 mm bei 3,4 mm Wellenlänge gewonnen.

Die Unterlage wirkt für die Schallstrahlen als Spiegel, so daß die Figur als Hauptschnitt angesehen werden kann. Die Umrundung der vom Staub frei geblasenen Fläche ist unter der Photographie nochmals dargestellt. Dazu ist die Richtcharakteristik für den Hauptschnitt eines rechteckigen Strahlers der Breite  $b = 9/3,4 \lambda = 2,65 \lambda$  gezeichnet, wobei die Amplituden auf der Hauptnormalen auf den gleichen Wert gebracht sind. Vor einer quantitativen Auswertung solcher Staubfiguren muß gewarnt werden, solange die Natur des sogenannten Quarzwindes (Strahlbildung) noch nicht ganz sichergestellt ist. Auch kann es bei der Bewegung des Staubes zu einer Art Lawinenbildung kommen, die die Staubfiguren verzerrt. Weitere Aufnahmen derartiger Staubfiguren finden sich in den genannten Arbeiten von Straubel und von Grossmann.

Die bei Staubfiguren auftretenden Fehlerquellen lassen sich vollständig vermeiden, wenn man zur Ermittlung der Amplitudenverteilung ebenfalls optische Methoden anwendet und damit das Ultraschallfeld in einer Flüssigkeit untersucht. Erstens lassen sich wenigstens die Richtungen der Nebenmaxima unmittelbar aus guten Aufnahmen des Schallfeldes ersehen, wie die Fig. 2 und 3 beweisen. Zur genaueren Untersuchung der Amplitudenverteilung kann man ferner die optischen Beugungerscheinungen am Ultraschallwellengitter benutzen. Bekanntlich haben Debye und Sears<sup>1)</sup> sowie Lucas und Biquard<sup>2)</sup> gezeigt, daß eine von Ultraschallwellen durchsetzte Flüssigkeit als optisches Gitter wirken kann, und daß die Zahl der dabei auftretenden Beugungsspektren mit der Ultraschallintensität zunimmt. Experimentell bedeutet das in dem hier interessierenden Falle die Möglichkeit der Abtastung des Schallfeldes mit Lochblenden nach der Methode von Bär und Meyer<sup>3)</sup> oder mittels Spaltblenden nach Hiedemann und Asbach<sup>4)</sup>. Noch nicht abgeschlossene Versuche der beiden Letztgenannten haben bereits gezeigt, daß sich alle drei genannten optischen Methoden auf die hier behandelten Erscheinungen anwenden lassen.

*Escuela Politécnica, Quito, Ecuador; Abteilung für Elektrolytforschung an der Universität Köln.*

<sup>1)</sup> P. Debye u. F. W. Sears, Proc. Nat. Acad. Amer. **18**, 410, 1932. —

<sup>2)</sup> R. Lucas u. P. Biquard, l. c. — <sup>3)</sup> R. Bär u. Edgar Meyer, Phys. ZS. **34**, 393, 1933. — <sup>4)</sup> E. Hiedemann und H. R. Asbach, Phys. ZS. **35**, 26, 1934.

## Anschauliches zur Relativitätstheorie.

### I. Lineare Koordinaten und $g_{ik}$ -Koeffizienten in der speziellen Relativitätstheorie.

Von **Jan von Weyssenhoff** in Wilno.

(Eingegangen am 11. April 1935.)

Um die physikalisch-anschauliche Bedeutung der allgemeinen RZ.-Koordinaten und der einzelnen  $g_{ik}$ -Koeffizienten in der allgemeinen Rth. klarzulegen, ist es vorteilhaft, in der speziellen Rth. allgemeine lineare Koordinaten an Stelle der Galileischen einzuführen. Das wird in der vorliegenden Abhandlung elementar durchgeführt, wobei auch der anschauliche Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen RZ.-Koordinaten deutlich hervortritt. In den Ziffern 15, 16, 22 und 23 werden die Eigenschaften der zwei interessantesten Arten von uneigentlichen RZ.-Koordinaten besprochen. — Es werden einfache Gedankenexperimente für die sukzessive Messung der  $g_{ik}$ -Koeffizienten angegeben. Zuerst muß man die  $\sqrt{-g_{44}}$  mit einem „ruhenden“ Chronometer messen und die Komponenten  $a_\alpha$  des „Asymmetrievektors“ aus „Lichtgeschwindigkeitsmessungen“ in zwei entgegengesetzten Richtungen ermitteln. Mittels „ruhender“ Maßstäbe mißt man sodann nach bekannter geometrischer Art die  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten der räumlichen Fundamentalform und berechnet schließlich die übrigen  $g_{ik}$ -Koeffizienten, welche sich einfach durch die obigen Größen ausdrücken. — Dabei kann man auch die Lichtgeschwindigkeitsmessungen völlig entbehren, wenn man den Asymmetrievktor aus „dynamischen Experimenten“ (Ziffern 10 und 26) ermittelt.

1. Ein großer Teil der Schwierigkeiten, die ein anschaulich denkender Physiker beim Studium der Relativitätstheorie (Rth.) empfindet, röhrt wohl daher, daß diese Disziplin hauptsächlich von Mathematikern entwickelt und verbreitet wurde. Dabei litt oft die anschauliche Bearbeitung mancher Einzelheiten zugunsten einer abstrakten Allgemeinheit der Darstellung und insbesondere fehlt es bis heute an einer ausführlichen Analyse des Zusammenhangs der gebrauchten Symbole mit wirklichen Messungen. Die Behebung dieser Mängel würde ein neues, von den heutigen ziemlich abweichendes Lehrbuch der Rth. erfordern. In dieser Abhandlung will ich nur einige damit zusammenhängende Fragen besprechen.

2. Der metrische Fundamentaltensor  $g_{ik}$  wird gewöhnlich erst in der allgemeinen Rth. eingeführt. Um aber die physikalische Bedeutung<sup>1)</sup> der

---

<sup>1)</sup> Selbstverständlich gebrauchen wir hier den Ausdruck „physikalische Bedeutung“ in dem alten gut bewährten Sinn von „meßbar“, „beobachtbar“, „anschaulich“, und nicht, wie manche Relativitätstheoretiker in Anlehnung an den Gebrauch des Ausdrückes „geometrische Bedeutung“ in der Geometrie: „unabhängig von der Wahl der Koordinaten“, also „absolut“, „invariant“ (in bezug auf eine Gruppe von Koordinatentransformationen, die oft nicht explizit angegeben wird). In diesem letzten Sinne hätten Begriffe, wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Energie und dergleichen keine „physikalische Bedeutung“!

einzelnen  $g_{ik}$ -Koeffizienten zu erkennen, ist es angezeigt, diesen Tensor bereits in der speziellen Rth. zu definieren. Dabei bietet sich eine günstige Gelegenheit, die spezielle Rth. in allgemeinen linearen Koordinaten darzustellen, wodurch man den „pädagogischen Hauptfehler“ der heutigen Darstellungsweisen der Rth. vermeidet, daß man gleichzeitig mit dem Übergang von der speziellen zur allgemeinen Theorie auch die prinzipielle Bedeutung der zugrundegelegten Koordinaten ändert. Um diesen grundsätzlichen Unterschied auch in der Bezeichnung zu berücksichtigen, werden wir im folgenden die Galileischen Koordinaten der speziellen Rth. mit großen und die allgemeinen Einsteinschen Raumzeitkoordinaten (RZ.-Koordinaten) mit kleinen Buchstaben bezeichnen.

Vom physikalisch anschaulichen Standpunkte aus müssen wir drei Arten von  $g_{ik}$ -Koeffizienten unterscheiden<sup>1)</sup>, je nachdem beide, einer oder keiner der Indizes Zeitcharakter hat. Die Koeffizienten  $g_{4\alpha}$  werden besonders unsere Aufmerksamkeit auf sich lenken, da sie keine Analoga in der klassischen Physik haben. Wir werden aber sehen — was selten genügend klar hervorgehoben wird (\*<sup>2)</sup>) —, daß auch die Koeffizienten  $g_{\alpha\beta}$  mit zwei raumartigen Indizes in allgemeinen [„nichtorthochronischen“<sup>3)</sup>] Koordinaten eine andere physikalische Bedeutung haben, als die entsprechenden Koeffizienten in der Geometrie (Flächentheorie), die wir zur Unterscheidung mit  $\gamma_{\alpha\beta}$  bezeichnen werden<sup>4)</sup>.

Überhaupt möchten wir hier bemerken, daß die Analogie zwischen den  $\gamma_{\alpha\beta}$ - und den  $g_{ik}$ -Koeffizienten nur formaler Natur ist, und es muß sowohl vom pädagogischen als auch vom erkenntnistheoretischen Standpunkte als völlig verfehlt betrachtet werden, wenn man die geometrisch anschauliche Bedeutung der  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten in der Flächentheorie erklärt, und dann ohne weiteres zu den  $g_{ik}$ -Koeffizienten der Einsteinschen Theorie

<sup>1)</sup> Die Indizes  $i, k$  sollen stets die Werte 1, 2, 3, 4 annehmen,  $\alpha, \beta$  dagegen nur die Werte 1, 2, 3. — <sup>2)</sup> Sternzeichen — ohne explizite Quellenangabe — sollen die Aufmerksamkeit des Lesers auf solche Punkte lenken, die oft — selbst von den anerkanntesten Relativitätstheoretikern — unklar oder gar falsch dargestellt werden.

— <sup>3)</sup> Da die Orthogonalität einer zeitartigen und einer raumartigen Richtung im Minkowskischen Diagramm anschaulich nichts mit der Orthogonalität im Raume zu tun hat, so schlage ich vor, solche Koordinaten, in welchen die Zeitachse orthogonal im Minkowskischen Sinne zu den Raumachsen steht, für welche also  $g_{44} = 0$  ist, „orthochrone“ Koordinaten zu benennen. Die Orthochronizität eines Koordinatensystems ist, wie wir weiter unten sehen werden, eine Eigenschaft der „ gegenseitigen Einstellung“ der Koordinatenchronoskope (Ziffer 18).

— <sup>4)</sup> Wir setzen also für die metrische Fundamentalform im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum, d. h. für das Quadrat des „Intervalls“:  $s^2 = \sum_{ik} g_{ik} x_i x_k$ ,

dagegen für das Quadrat der räumlichen Entfernung:  $\sigma^2 = \sum_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ .

übergeht (\*); die Längenmessung im dreidimensionalen Raum und die Intervallmessung im vierdimensionalen Raumzeitkontinuum sind ja zwei gänzlich verschiedene Verfahren. Dieser Unterschied tritt am deutlichsten hervor bei den  $g_{4\alpha}$ -Koeffizienten, deren physikalisch anschauliche Bedeutung nichts mit Kosinus von Winkeln zu tun hat.

3. Bei der Verfolgung des Planes einer möglichst anschaulichen Darstellung der Rth. ist es wohl angezeigt, alle geometrischen Ausdrücke immer in ihrer ursprünglichen dreidimensionalen Bedeutung zu gebrauchen und die entsprechenden vierdimensionalen Begriffe mit abgeleiteten Namen zu versehen. Im folgenden wollen wir also stets unter „Punkt“ einen Raumpunkt verstehen, eine Vektorgröße werden wir stets im Sinne der klassischen Physik auffassen u. dgl. Die analogen vierdimensionalen Gebilde können wir Raumzeitpunkt (Punkt Ereignis), Vierervektor, Hyperfläche u. dgl. nennen.

Selbstverständlich gebrauchen wir auch das Wort „Geometrie“ im Sinne der „praktischen“ oder besser „physikalischen Geometrie“; dementsprechend verstehen wir unter „Punkt“ den Grenzfall eines immer kleiner werdenden Körpers und nicht ein abstraktes „Ding“ der „mathematischen Geometrie“ u. dgl.

### I.

4. Wir stellen uns jetzt auf den Boden der speziellen Rth., die wir in ihrer allgemein üblichen Darstellungsform als bekannt voraussetzen<sup>1)</sup>. Die dabei gebrauchten Koordinaten werden wir Galileische nennen und mit großen Buchstaben  $X, Y, Z, T$  bezeichnen. Diese Koordinaten — oder genauer gesprochen ihre Differenzen — haben eine unmittelbare physikalische Bedeutung; sie können als Ergebnis wohldefinierter Messungen mit Normaleinheitsmaßstäben und Chronometern<sup>2)</sup> betrachtet werden.

<sup>1)</sup> Wohlgemerkt handelt es sich hier also nicht um eine Neubegründung der Rth. in allgemeinen linearen Koordinaten ohne Gebrauch von Galilei-Koordinaten, wenn auch eine solche Begründung wohl möglich und vielleicht sogar zur besseren Klärung einiger prinzipieller Fragen erwünscht wäre. —

<sup>2)</sup> Da „Uhr“ in der Rth. in verschiedenem Sinne gebraucht wird, so schlage ich vor, Vorrichtungen, die nichts anders anzeigen als den Ablauf der Zeit, „Chronoskope“ zu nennen, Chronoskope dagegen, die zur „Messung“ von Zeitdauern eingerichtet sind, als „Chronometer“ zu bezeichnen. Ein eigentliches RZ.-Koordinatensystem wird also anschaulich als eine „Bezugsmolluske mit eingebetteten Chronoskopen“ zu beschreiben sein. Obwohl die Koordinatenuhren der linearen Systeme „gleichmäßig gehen“ und sich nur durch die „Ganggeschwindigkeit“ (und die „gegenseitige Einstellung“) von den Chronometern der Galilei-Systeme unterscheiden, werden wir sie hier Chronoskope nennen, da die Betrachtung der linearen Koordinaten hauptsächlich als erster Schritt zur besseren Veranschaulichung der allgemeinen RZ.-Koordinaten gemeint ist.

Nun wählen wir vier beliebige reelle eindeutige stetig differenzierbare Funktionen der vier Galileischen Koordinaten und setzen

$$x_i = f_i(X, Y, Z, T). \quad (1)$$

Die einzige Beschränkung, welche wir vorläufig den Funktionen  $f_i$  auferlegen, besteht in der Forderung einer eindeutigen Lösbarkeit der Gleichungen (1) im ganzen betrachteten Bereich. Die Zahlen  $x_1, x_2, x_3, x_4^1$ ) nennen wir allgemeine *Einstiinsche Koordinaten*; es sind Zahlenquadrupeln, die (in einem gewissen Raumzeitgebiet) eineindeutig, stetig und „glatt“ (\*), aber sonst beliebig, den Punktereignissen zugeordnet sind. Außerdem haben sie keine unmittelbare physikalische Bedeutung. In physikalische Gleichungen können sie erst in Verbindung mit den Koeffizienten des metrischen Fundamentaltensors eingehen.

5. Wir haben hier die Einstiinschen Koordinaten, ausgehend von den Galileischen, definiert. Auf die Frage, wie sie in allgemeinerer Weise „gegeben“ sein können, gehen wir hier nicht näher ein, bemerken nur, daß das „Geben“ der Koordinaten in der uns umgebenden Welt immer letzten Endes auf (mittelbare oder unmittelbare) „individuelle Aufweisungen“<sup>2)</sup> von gewissen materiellen Objekten zurückführbar ist. Diese individuellen Aufweisungen stehen aber in keinem prinzipiellen Zusammenhang mit der individuellen Aufweisung eines Normaleinheitsmaßstabes oder einer Normaluhr (siehe weiter unten, Ziffer 9).

6. Die allgemeinen Einstiinschen Koordinaten haben so wenig anschauliche Bedeutung, daß wir kein Recht haben, eine dieser Koordinaten als Zeitkoordinate auszuzeichnen und die anderen als Raumkoordinaten aufzufassen. In dieser Allgemeinheit werden sie aber selten gebraucht.

Ist eine den Koordinaten  $x_i$  entsprechende „Bezugsmolluske mit eingebetteten Chronoskopen“ möglich, so wollen wir die Koordinaten „Bezugsmolluskekoordinaten“ nennen; die von den Chronoskopen angezeigte Zeitkoordinate werden wir zur  $x_4$ -Koordinate wählen. Erst wenn die „gegenseitige Einstellung“ der Chronoskope gewissen weiteren einschränkenden Bedingungen unterworfen wird, können wir die  $x_i$ -Koordinaten „eigentliche RZ.-Koordinaten“ nennen (\*). Die Unterschiede zwischen diesen drei Arten von Koordinaten werden wir im II. Teil an Hand von einfachen Beispielen näher besprechen, um sie nachher im III. Teil allgemein zu formulieren.

---

<sup>1)</sup> Wir werden auch oft  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ct$  setzen. Vgl. Fußnote 2, S. 396. — <sup>2)</sup> Vgl. H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie“, 5. Aufl., S. 8.

7. Alle drei eben aufgezählten Koordinatenarten können auch in der speziellen Relativitätstheorie als *lineare Koordinaten* auftreten<sup>1)</sup>. Für unsere Zwecke wird es genügen, sich auf die Betrachtung solcher Koordinaten zu beschränken. Wir werden also fortan annehmen, daß die Funktionen in (1) linear sind. Unter Zugrundelegung solcher Koordinaten drückt sich bekanntlich die Bewegung eines jeden freibewegten Massenpunktes und eines jeden Lichtsignals im Vakuum mittels linearer Gleichungen aus. Auf die Frage, inwieweit — oder in welchem Sinne — diese Eigenschaft für diese Koordinaten charakteristisch ist, gehen wir hier nicht näher ein. Anschaulich kann man diese Koordinaten als räumlich affine „nichtbeschleunigte“ RZ.-Koordinatensysteme bezeichnen.

Anstatt (1) schreiben wir jetzt also<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} X &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4, \\ Y &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}x_4, \\ Z &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + A_{34}x_4, \\ eT &= A_{41}x_1 + A_{42}x_2 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4. \end{aligned} \right\} \quad (\text{L})$$

Zur Vereinfachung haben wir bereits angenommen, daß die Funktionen rechts nicht nur linear, sondern auch homogen sind, was immer durch eine triviale Verlegung des Koordinatenanfangspunktes erreicht werden kann. Von den Konstanten  $A_{ik}$  nehmen wir vorläufig nur an, daß sie eine nicht verschwindende Determinante bilden.

## II.

8. Um die physikalisch anschaulichen Gesichtspunkte besser hervortreten zu lassen, wollen wir zuerst einige Spezialfälle der Transformation (L) möglichst elementar besprechen und erst nachher zu allgemeineren Formulierungen übergehen.

Wir gehen also von einem beliebigen fest gewählten Galileischen System aus, das wir  $G$  nennen wollen, und führen neue lineare Koordinatensysteme mittels Transformationsgleichungen vom Typus (L) ein. Die neuen Koordinatensysteme werden wir mit denselben Buchstaben bezeichnen, wie die zu ihnen führenden Transformationsgleichungen.

### 9. Bereits an die allereinfachste Transformationsgleichung

$$X = Ax \quad (\text{L}_x)$$

haben wir von unserem Standpunkt aus einige Bemerkungen anzuknüpfen. Es soll zuerst ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß diese Gleichung

<sup>1)</sup> Vgl. H. Weyl, a. a. O., 4. Aufl., S. 160. — <sup>2)</sup> Die Bezeichnungen sind so gewählt, daß die  $A_{ik}$  als dimensionslose Konstanten betrachtet werden können. Vgl. Fußnote 2, S. 396.

— sowie allgemein die Gleichungen (L) — als Transformation der Koordinaten *ohne Änderung der physikalischen Längeneinheit* aufgefaßt werden soll; mittels dieser Gleichung wird also nur eine neue Bezeichnung der Punkte auf der  $x$ -Achse eingeführt. Die physikalische Längeneinheit ist ein „individuell aufgewiesener“ Körper<sup>1)</sup>, z. B. das in Sèvres aufbewahrte Normalmeter aus Platiniridium, der prinzipiell nichts mit der Bezifferung der Punkte auf der  $x$ -Achse zu tun hat<sup>2)</sup>; sie kommt erst zur Geltung bei Längenmessungen und bei der Bestimmung der  $\gamma_{\alpha\beta}$ - und der  $g_{ik}$ -Koeffizienten.

Dennoch werden oft Koordinatentransformationen von Mathematikern als Änderung der Längeneinheit (längs der  $x$ -Achse) bezeichnet. In einem ähnlichen Sinne spricht man oft von verschiedenen Längeneinheiten in verschiedenen Richtungen. Sollte diese Ausdrucksweise beibehalten werden, so müßte man zwischen „physikalischer“ und „mathematischer“ Längeneinheit unterscheiden. Die mathematische Längeneinheit wäre dann nichts anderes als das was der Physiker anschaulicher „Einheitsmasche längs einer Achse“ nennt; die Längenmessung wäre als Vergleich der physikalischen mit der mathematischen Längeneinheit aufzufassen. Spricht der Physiker von Längeneinheit schlechthin, so müssen wir jedenfalls annehmen, daß er dabei die physikalische Längeneinheit im oben angegebenen Sinne meint.

10. Bekanntlich ist es praktisch, das Resultat der Längenmessung längs der  $x$ -Achse in der Form

$$\sigma^2 = \gamma_{11} x^2 \quad (2)$$

anzugeben. Die physikalisch geometrische Bedeutung des  $\gamma_{11}$ -Koeffizienten kann man kurz wie folgt erklären: die  $\sqrt{\gamma_{11}}$  ist die Länge (in cm) einer Einheitsmasche ( $\Delta x = 1$ ) auf der  $x$ -Achse; dabei verstehen wir unter Länge das Resultat einer mit dem Normaleinheitsmaßstab ausgeführten Messung.

In der Flächentheorie, sowie überhaupt in der „eigentlichen“ Geometrie (wo nur „räumliche“ Koordinaten in Betracht kommen), ist dabei von dem

---

<sup>1)</sup> Vgl. Ziffer 5. — <sup>2)</sup> Deshalb wäre es am meisten folgerichtig, die  $x_i$  als dimensionslose Größen zu betrachten. Bekanntlich sind aber Dimensionen nur Sache von Verabredungen; diese sollten möglichst praktisch getroffen werden. Dieser Forderung entspricht wohl am besten die Erteilung der Dimension der Länge allen vier Koordinaten  $x_i$ . Dann behält die Gleichung  $x_4 = ct$  ihren gewöhnlichen Sinn und bei der konkreten Interpretation von speziellen Gravitationsfeldern, wie z. B. von statischen oder stationären Feldern, kann man ohne weiteres  $x_1, x_2, x_3$  mit gewissen Längen und  $x_4/c$  mit gewissen Zeitdauern identifizieren. Unsere Festsetzung der Dimensionen beruht letzten Endes auf der Verabredung, daß bei jeder Veränderung der Längeneinheit die Bezifferung der Raumzeitpunkte auch eine entsprechende Veränderung erleiden soll.

Bewegungszustände der Maßstäbe überhaupt keine Rede, doch kann man sich wohl die Messung der Länge in der physikalischen Geometrie nicht anders denken, als mittels „ruhender“ Maßstäbe ausgeführt. Es drängen sich dann zwei Bemerkungen auf. Erstens, muß „ruhend“ bedeuten „ruhend in bezug auf ein Galileisches System“. Bei einem „beschleunigten“ Bezugssystem, d. h. bei Anwesenheit von Gravitationsfeldern, treten besondere Schwierigkeiten auf, die in der II. Mitteilung besprochen werden sollen. Zweitens aber — wie wir bald sehen werden — sind auch bei linearen Systemen, die mittels „relativ ruhenden“, d. h. „mitbewegten“ Maßstäben gemessenen  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten im allgemeinen nicht gleich den entsprechenden  $g_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten (\*).

11. Nach diesen Bemerkungen brauchen wir uns bei der Einführung der Differentialform

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha, \beta} \gamma_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta, \quad (3)$$

die das Quadrat der räumlichen Entfernung darstellt, sowie bei der Erklärung der geometrischen Bedeutung der einzelnen  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten nicht länger aufzuhalten. Die  $\gamma_{\alpha\alpha}$  entsprechen bekanntlich dem  $\gamma_{11}$  in (2); für  $\alpha \neq \beta$  ist  $\gamma_{\alpha\beta} = \sqrt{\gamma_{\alpha\alpha}} \sqrt{\gamma_{\beta\beta}} \cos(\alpha, \beta)$ , wo  $(\alpha, \beta)$  den Winkel zwischen der  $x_\alpha$ - und der  $x_\beta$ -Achse bedeutet. Um es aber nochmals zu betonen, betreffen eigentlich die allgemein üblichen Darstellungsweisen der geometrisch-analogen Bedeutung der „ $g_{ik}$ -Koeffizienten“ nur die  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten, also weder die  $g_{\alpha\beta}$  bei nichtorthochronischen Koordinaten, noch die  $g_{4\alpha}$ - und  $g_{44}$ -Koeffizienten (vgl. Ziff. 2 und 10).

12. Ähnliche Überlegungen beziehen sich auf die Transformation

$$T = Bt. \quad (L_t)$$

Bei einer Uhr entspricht sie einer Neueinregulierung, welche die Ganggeschwindigkeit in einem konstanten Verhältnis verändert. Stellen wir uns aber zwei nebeneinanderstehende Uhren vor, z. B. ein Chronometer des Systems  $G$  und ein danebenstehendes  $L$ -Chronoskop, dann gibt  $B$  das Verhältnis der Ganggeschwindigkeiten dieser beiden Uhren an. Die von dem Chronometer angezeigte Zeit  $T$  wird auch „Eigenzeit“  $\tau$ , sowohl dieses Chronometers, als auch des „mitbewegten“ Chronoskops genannt. Indem wir —  $B^2 = g_{44}$  setzen, können wir also schreiben

$$ds^2 = -c^2 dt^2 = -g_{44} (c dt)^2 = -g_{44} (dx_4)^2. \quad (4)$$

Diese Formel kann als Spezialfall der allgemeinen Formel für  $ds^2$  aufgefaßt werden, wenn nur die RZ.-Koordinatensysteme, zu welchen die beiden Uhren gehören, gegeneinander ruhen; dann folgen nämlich aus den

Gleichungen  $dX = 0 = dY = dZ$  die Gleichungen  $dx = 0 = dy = dz$  und umgekehrt.

Wir sehen also, daß wir es hier sogar mit einfacheren Verhältnissen zu tun haben, da ein mitbewegtes Chronometer — unabhängig von der Einstellung der anderen Systemchronoskope, also unabhängig davon, ob die Koordinaten orthochronisch oder nichtorthochronisch sind — immer den  $g_{44}$ -Koeffizienten mißt, und zwar gibt  $\sqrt{-g_{44}}$  die von einem mitbewegten Chronometer (in sec) angezeigte Zeit an, welche der Zeitspanne ( $\Delta t = 1$ ) eines Schläges der Systemchronoskope entspricht. Man kann auch sagen, daß diese Wurzel das Verhältnis angibt, in welchem die Koordinatenchronoskope langsamer gehen als mitbewegte Normalchronometer<sup>1)</sup>.

13. Wir gehen jetzt zur Besprechung von linearen Transformationen über, die gleichzeitig auf eine räumliche Koordinate, z. B.  $x$ , und auf eine zeitliche Koordinate  $t$  einwirken. Anschaulich gesprochen, betrachten wir also ein „Linienland“, d. h. das „Geschehen auf der  $x$ -Achse“ oder „das statische Sein“ im zweidimensionalen Minkowskischen ( $xt$ )-Diagramm (dessen Gebrauch wir hier aber mit Absicht möglichst vermeiden wollen).

Die allgemeine linear-homogene Transformation, die von  $G$  aus zu dem Koordinatensystem  $x, t$  führt, wollen wir in der folgenden Form ansetzen:

$$\left. \begin{array}{l} X = A(x - wt), \\ T = B(t - ax). \end{array} \right\} \quad (L_2)$$

Sie ist nur insofern spezialisiert, als das Nichtverschwinden der Determinante  $AB(1 - aw)$  das Nichtverschwinden von  $A_{11}$  und  $A_{44}$  nach sich zieht. Wir werden sogleich sehen, daß man die Koeffizienten  $w$  und  $a$  ihrem absoluten Betrag nach von oben beschränken muß, wenn man  $x$  als Raumkoordinate und  $t$  als Zeitkoordinate deuten will<sup>2)</sup>.

14. Zuerst betrachten wir den folgenden besonders einfachen Spezialfall von  $(L_2)$ :

$$X = x - wt, \quad T = t \quad (w > 0). \quad (L'_2)$$

Das ist — der Form nach — die bekannte Galilei-Transformation der klassischen Kinematik, die Interpretation aber, die wir ihr jetzt geben, ist völlig verschieden; wir betrachten nämlich  $(L'_2)$  als Definitionsgleichungen

<sup>1)</sup> Da in dieser Mitteilung nur lineare RZ.-Koordinaten betrachtet werden, sind mitbewegte Chronometer auch „beschleunigungsfrei“ bewegte, „mitfallende“. Die Schwierigkeiten, die bei Zeit und Längenmessungen in Gravitationsfeldern eintreten, sollen in der II. Mitteilung besonders besprochen werden.

<sup>2)</sup> Aus Bequemlichkeitsgründen nimmt man stets  $B > 0$  und gewöhnlich auch  $A > 0$  an. Wir werden dasselbe tun und überdies werden wir bei konkreten Beispielen  $w$  und  $a$  ebenfalls als positive Größen betrachten.

neuer Koordinaten, ohne die prinzipielle Gleichwertigkeit des neuen Bezugssystems mit dem alten zu postulieren. In der klassischen Kinematik faßt man  $L'_2$  auf: 1. als ein Bezugssystem, welches sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $w$  in bezug auf das Galileische System  $G$ , in der Richtung der negativen  $X$ -Achse bewegt und 2. als ein Galileisches System. Hier, in der speziellen Relativitätstheorie, ist, wie gesagt, 2. falsch; aber auch 1. kann nur dann beibehalten werden, wenn

$$|w| < c \quad (5)$$

ist, da kein materieller Punkt sich in bezug auf ein Galileisches System schneller oder gleich schnell wie das Licht bewegen kann.

15. Wenn

$$w > c \quad (6)$$

ist, so können wir noch immer die Zahlenpaare  $x, t$  zur Charakterisierung der einzelnen Punktereignisse in unserem Linielande benutzen, aber die Ereignisse  $x = \text{const}$  können nicht mehr den aufeinanderfolgenden Zuständen desselben Massenpunktes entsprechen. Es kann dann auch keine Bezugsmolluske im Einsteinschen Sinne geben. Wenn man jedoch weiter daran festhalten wollte, die  $x$ -Zahlen als charakteristisch für „Raumpunkte“ aufzufassen, so würde man zu ganz merkwürdigen Resultaten kommen. Ruhende Körper in  $L'_2$  könnten überhaupt nicht existieren und die Lichtsignale würden sich nur in einer Richtung, aber mit zwei verschiedenen Geschwindigkeiten  $w + c$  und  $w - c$ , längs der  $x$ -Achse fortpflanzen.

Wir gelangen so zu dem einfachsten Beispiel eines „uneigentlichen RZ.-Koordinatensystems ohne Bezugsmolluske“, dessen Gebrauch — wie übrigens der aller uneigentlicher RZ.-Koordinatensysteme — zwar prinzipiell möglich, aber recht unpraktisch wäre. Im Minkowskischen Diagramm würden beide Achsen raumartig sein.

16. Zur Vervollständigung des Bildes wollen wir noch kurz schildern, wie sich die Sachlage im  $(3 + 1)$ -dimensionalen Fall darstellt. Wir betrachten ein lineares Bezugssystem, das aus  $G$  durch die Transformation  $(L'_2)$  mit Hinzufügung der Gleichungen  $Y = y, Z = z$  entsteht. Stellen wir uns vor, daß wir in irgendeinem Punkte  $P$  dieses Systems zu irgendeiner Zeit  $t = T$  einen Lichtblitz erzeugen; nach einer gewissen Zeit  $\Delta t$  befinden sich alle ausgesandten Lichtsignale auf der Oberfläche eines Ellipsoids (das in unserem besonders einfachen Fall sogar eine Kugel ist). Wenn aber  $w > c$  ist, befindet sich der Aussendungspunkt  $P$  außerhalb dieses Ellipsoids! Innerhalb befindet er sich nur bei eigentlichen Koordinaten, wenn  $w < c$  ist, und im Mittelpunkt des Ellipsoids nur bei orthochronischen Koordinaten, also in dem jetzt betrachteten Beispiel nur für  $w = 0$ .

Wir werden bald sehen, daß man bei anderen Arten von uneigentlichen RZ.-Koordinaten zu noch merkwürdigeren Resultaten kommt, wenn man an der Deutung von  $x_1, x_2, x_3$  als Raumkoordinaten und von  $t$  als Zeitkoordinate festhalten will (siehe weiter unten Ziffer 22).

17. Jetzt kehren wir also wieder zu eigentlichen RZ.-Koordinaten  $L'_2$  zurück, indem wir die Bedingung (5) als gültig annehmen. Definieren wir die „Geschwindigkeit“ im System  $L'_2$  als die Ableitung der  $x$ -Koordinaten nach der  $t$ -Koordinate<sup>1)</sup>, so ist diese ihrem absoluten Betrag nach um  $w$  größer oder kleiner als die entsprechende Geschwindigkeit im Galilei-System  $G$ ; die (skalaren) „Lichtgeschwindigkeiten“ in beiaen Richtungen<sup>2)</sup>  $c_+$  und  $c_-$  sind entsprechend gleich  $c + w$  und  $c - w$ .

Das Quadrat des Intervalls in  $L'_2$  können wir folgendermaßen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} s^2 &= X^2 - c^2 T^2 = x^2 - 2 \frac{w}{c} x(c t) - \left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right) (c t)^2 \\ &= g_{11} x^2 + 2 g_{41} x(c t) + g_{44} (c t)^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Daraus erhalten wir:

$$g_{41} = \frac{c_- - c_+}{2 c}, \quad (8)$$

eine Gleichung, die den „physikalischen Sinn“ dieses Koeffizienten in dem eben betrachteten Fall klar legt [vgl. Ziffer 24, Gleichung (19)].

Über die physikalische Bedeutung der zwei anderen Koeffizienten  $g_{11} = 1$  und  $g_{44} = -\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)$  ist folgendes zu sagen. Obwohl  $t = T$  ist, zeigt ein in  $L'_2$  ruhendes Chronometer nicht die „Zeit“  $t$  an; da es sich in dem „synchronen“ Galilei-System  $G$  bewegt, in welchem  $T = t$  ist, so geht es langsamer im Verhältnis  $\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}} : 1$ . Nach der allgemeinen Regel (Ziffer 12) mißt es jedoch den Koeffizienten  $g_{44}$ , indem  $\sqrt{-g_{44}} = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$ .

Ein Normaleinheitsmaßstab dagegen, der in  $L'_2$  ruht, mißt nicht unmittelbar die entsprechende  $\sqrt{g_{11}}$ , sondern nur die  $\sqrt{\gamma_{11}}$ . In unserem Fall sieht man das am besten ein, wenn man bedenkt, daß dieser Maßstab sich in bezug auf  $G$  mit der Geschwindigkeit  $w$  bewegt; wegen der Lorentz-Verkürzung wird daher das seinen Enden entsprechende  $\Delta X = \sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}$ .

<sup>1)</sup> In der Rth. wird das Wort „Geschwindigkeit“ in verschiedenen Bedeutungen gebraucht (\*). — <sup>2)</sup> Vgl. Ziffer 24, letzter Absatz.

Da aber  $\Delta x = \Delta X$  ist, so wird dieser Maßstab, auf der  $x$ -Achse ruhend, weniger als eine Einheitsmasche bedecken und zwar wird  $\sqrt{g_{11}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}$ ,

obwohl  $\sqrt{g_{11}} = 1$  ist<sup>1)</sup>. Am leichtesten erklärt man dem Studierenden diese wichtige Tatsache der Verschiedenheit von  $g_{11}$  und  $\gamma_{11}$  in nichtorthochronischen Koordinaten in Zusammenhang mit der Transformation  $(L_2^0)$  (siehe Ziffer 21).

Hier können wir noch bemerken, daß man die  $\sqrt{g_{11}}$  auch direkt mit einem Normaleinheitsmaßstab messen kann, dazu muß man ihm aber eine Geschwindigkeit  $w$  in der Richtung der  $x$ -Achse geben. Dann ruht dieser Maßstab in  $G$ , seinen Endpunkten entspricht daher  $\Delta X = 1$ , und da die Zeitangaben in  $G$  und in  $L_2'$  übereinstimmen, so können wir  $s^2 = (\Delta X)^2 = (\Delta x)^2$  schreiben und daraus  $g_{11} = 1$  folgern, wie es nach (7) sein soll.

18. Jetzt lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf einen anderen einfachen Spezialfall von  $(L_2)$  hin, und zwar auf die Transformation

$$X = x, \quad T = t - ax, \quad (a > 0), \quad (L_2^0)$$

die insofern besonders interessant ist, als sie erst seit dem Erscheinen der Relativitätstheorie eine Rolle spielt, obwohl sie prinzipiell auch in der klassischen Physik hätte gebraucht werden können. Physikalisch-anschaulich kann man diese Transformation charakterisieren als „gegenseitige Verstellung“ der Koordinatenchronoskope ohne Veränderung ihrer Bewegungszustände und ihrer  $x$ -Bezeichnung. Eines dieser Chronoskope, z. B. das an der Stelle  $X = x = 0$  befindliche, lassen wir in Ruhe, ein anderes, z. B.  $X = x = 1$ , rücken wir um  $a$  sec vor, alle anderen proportional zu ihren Entfernungen vom ersten Chronoskop. Man könnte also  $a$  den „Koeffizienten der gegenseitigen Verstellung der Koordinatenchronoskope“ nennen oder auch (siehe Ziffer 20) den *Asymmetriekoeffizienten* des betrachteten RZ.-Koordinatensystems.

Es ist interessant, daß durch die gegenseitige Verstellung der Koordinatenchronoskope alle Geschwindigkeiten (mit Ausnahme der Geschwindigkeit 0) eine Änderung erleiden, obwohl weder die „Längeneinheit auf der  $x$ -Achse“, noch die Ganggeschwindigkeit der Koordinatenchronoskope verändert wird und die beiden Koordinatensysteme  $G$  und  $L_2^0$  sich in relativer Ruhe befinden. Als „Geschwindigkeit“ verstehen wir dabei — wie oben Ziffer 17 — die Ableitung der  $x$ -Koordinate nach der  $t$ -Koordinate.

<sup>1)</sup> Der angegebene Wert von  $\sqrt{\gamma_{11}}$  folgt rechnerisch aus (7), (27) und (32).

19. Wir nehmen jetzt

$$|a| < \frac{1}{c} \quad (9)$$

an, wodurch  $L_2^0$  zu einem eigentlichen RZ.-Koordinatensystem gestempelt wird. Zwischen den absoluten Beträgen der Geschwindigkeit  $V$  im Galilei-System  $G$  und  $v$  in  $L_2^0$  besteht dann die Beziehung

$$v = \frac{V}{1 \pm aV}, \quad (10)$$

wo im Nenner das Plus- oder das Minuszeichen zu nehmen ist, je nachdem die Geschwindigkeit in die Richtung der positiven oder der negativen  $x$ -Achse fällt. Insbesondere sind die Lichtgeschwindigkeiten in beiden Richtungen

$$e_+ = \frac{c}{1 + ac}, \quad e_- = \frac{c}{1 - ac}. \quad (11)$$

Daraus ersehen wir den Grund, warum wir oben  $|a| c < 1$  gesetzt haben. Die Komplikationen, welche bei Verletzung dieser Ungleichung entstehen, werden wir in Ziffer 22 besprechen.

20. Aus (11) berechnen wir

$$a = \frac{e_- - e_+}{2e_- e_+}. \quad (12)$$

Wir können deshalb, wie bereits erwähnt,  $a$  den *Asymmetriekoeffizienten* des Systems  $L_2^0$  nennen, um so mehr, als eine ähnliche Formel

$$a = \frac{v_- - v_+}{2v_- v_+} \quad (13)$$

für je zwei „dynamisch äquivalente“ Geschwindigkeiten  $v_+$  und  $v_-$  gilt, die zwei entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten in dem mitbewegten Galilei-System  $G$  entsprechen, wie man aus (10) leicht berechnet. Wenn wir also z. B. zwei identische, in  $L_2^0$  ruhende Massenpunkte mittels eines symmetrisch zwischen ihnen wirkenden Agens, z. B. einer in der Mitte durchschnittenen homogenen zusammengedrückten Feder, auseinanderwerfen und ihre (skalaren) Geschwindigkeiten  $v_+$  und  $v_-$  in diesem Bezugssystem messen, so führen wir ein „dynamisches Experiment“ zur Messung des Asymmetriekoeffizienten  $a$  aus.

Wenn man die Koordinatenchronoskope so gegenseitig einstellt, daß sich das Licht in beiden  $x$ -Richtungen mit derselben Geschwindigkeit bewegt, so ergeben sich auch bei allen „dynamischen Symmetriexperimenten“ dieselben Geschwindigkeiten in beiden Richtungen. Diese Tatsache könnte man als eine der Grundpostulate der Relativitätstheorie einführen (vgl. Fußnote 1, S. 393).

**21.** Die physikalisch-an anschauliche Interpretation der Formel für das Quadrat des Intervalls in  $L_2^0$

$$s^2 = (1 - c^2 a^2) x^2 + 2 c a \cdot x (ct) - (ct)^2 \quad (14)$$

können wir wie folgt zusammenfassen. Eine in  $L_2^0$  ruhende Normaluhr mißt nach der allgemeinen Regel der Ziffer 12 die  $\sqrt{-g_{44}}$ , andererseits zeigt sie auch die „Zeitkoordinate“  $t$  an, da sie in dem mitbewegten Galilei-System  $G$ , in welchem ( $X = x = \text{const}$ )  $\Delta T = \Delta t$  ist, ebenfalls ruht; daher ist  $g_{44} = -1$ , wie es nach (14) sein soll.

Ein in einem linearen Bezugssystem ruhender Normaleinheitsmaßstab hat immer — unabhängig von der Einstellung der Koordinatenchronoskope — die „Ruhlänge“ Eins: die Entfernung  $\sigma$  seiner beiden Endpunkte ist gleich Eins. Aber das Intervall der beiden Punktereignisse, welche diesen Endpunkten zu derselben Zeitkoordinate  $t$  entsprechen, ist nur dann gleich Eins, wenn diese Ereignisse gleichzeitig in demjenigen Galilei-System sind, in welchem der Maßstab ruht; andernfalls muß eine dem Glied  $-c^2 (\Delta T)^2$  in dem Ausdruck für das Quadrat des Intervalls in Galileischen Koordinaten entsprechende Korrektion abgezogen werden. Elementaranschaulich kann man sich die Sachlage an den beiden Koordinatensystemen  $L_2^0$  und  $G$  klarmachen, die beide dieselbe Bezugsmolluske haben. Wenn wir einen Maßstab ruhend auf die  $x$ -Achse auflegen, so bedeckt er ein Stück  $\Delta X = 1 = \Delta x$  dieser Achse, daher ist  $\gamma_{11} = 1$ ; doch ist  $g_{11}$  in (14) aus dem eben angegebenen Grunde von Eins verschieden<sup>1)</sup>.

Der Koeffizient  $g_{44}$ , der in unserem Fall gleich  $ca$  ist, ist nach (12) proportional der Differenz der Lichtgeschwindigkeiten in beiden Richtungen, wie im Fall ( $L_2'$ ). Die allgemeinen Formeln sind in Ziffer 24 angegeben.

**22.** Wenn wir nun

$$a > \frac{1}{c} \quad (15)$$

voraussetzen, so bekommen wir das einfachste Beispiel eines „uneigentlichen RZ.-Koordinatensystems mit Bezugsmolluske“. Eine solche existiert ja in unserem Falle, da sie identisch mit der Bezugsmolluske des relativ ruhenden Galilei-Systems  $G$  ist; nur sind die Koordinatenchronoskope in  $L_2^0$  so „ungeschickt“ gegenseitig eingestellt, daß man zu ganz merkwürdigen Resultaten kommen würde, wenn man die Angaben dieser Chronoskope als „Zeit“ in diesem Bezugssystem deuten wollte.

---

<sup>1)</sup> Für  $\Delta t = 0$  erhalten wir aus ( $L_2^0$ )  $\Delta X = \Delta x$ ,  $\Delta T = -a \Delta x$ , also  $s^2 = \Delta X^2 - c^2 \Delta T^2 = (1 - c^2 a^2) \Delta x^2$  und daraus  $g_{11} = 1 - c^2 a^2$ .

Einer gewissen Geschwindigkeit in  $G$  würde dann eine unendliche „Geschwindigkeit“ in  $L_2^0$  entsprechen und — was vielleicht noch schwerer vorstellbar ist — manchen Geschwindigkeiten in  $G$  würden entgegengesetzte „Geschwindigkeiten“ in  $L_2^0$  entsprechen, obwohl die beiden Bezugssysteme  $G$  und  $L_2^0$  gegeneinander ruhen! Insbesondere würden die „Geschwindigkeiten“ beider von einem Punkte sich ausbreitenden Lichtsignale positiv ausfallen. Man darf jedoch nicht sagen, daß beide Signale sich in derselben Richtung in  $L_2^0$  fortpflanzen — da sie ja in dem mitbewegten System  $G$  auseinanderlaufen —, sondern eher, daß eines von ihnen sich „in die Vergangenheit hin“ bewegt. Das merkwürdige Vorzeichen seiner „Geschwindigkeit“ röhrt nicht von der Umkehrung des  $dx$  im Zähler her, sondern des  $dt$  im Nenner. Das wird vielleicht noch einleuchtender, wenn man sich ein Chronometer vorstellt, das sich in  $G$  mit einer größeren Geschwindigkeit als  $1/a$  in der negativen  $X$ -Richtung bewegt. Obwohl alle Koordinatenchronoskope in  $L_2^0$  „vorwärtsgehen“, erscheint doch der Lauf dieses Chronometers, an den  $L_2^0$ -Chronoskopen beurteilt, rückwärtig!

23. Betrachten wir jetzt wieder, wie in Ziffer 16, den entsprechenden  $(3+1)$ -dimensionalen Teil eines „uneigentlichen RZ.-Koordinatensystems“, diesmal aber „mit Bezugsmolluske“, und wiederholen das dort beschriebene Gedankenexperiment. Diesmal werden die zur „Zeit“  $t$  von einem Punkte  $P$  ausgesandten Lichtsignale zur „Zeit“  $t + \Delta t$  ein zweischaliges Hyperboloid (mit einem Brennpunkt in  $P$ ) bilden<sup>1)</sup>. Das Ellipsoid von Ziff. 16 könnte hier zu einem Hyperboloid werden, da die „Lichtgeschwindigkeit“ in gewissen Richtungen unendlich groß ist. Es sei auch darauf hingewiesen, daß nur eine Schale des Hyperboloids (die dem Punkte  $P$  näherliegende) späteren, die andere aber früheren Ereignissen als der Lichtblitz in  $P$  entspricht. Um alle Lichtsignale, welche zur „Zeit“  $t$  von  $P$  auslaufen, zu berücksichtigen, müßte man noch einen „Zeitpunkt“ mit einem kleineren  $t$  berücksichtigen. Die beiden Hyperbole zusammen würden einer sich nach  $P$  zusammenziehenden und einer von  $P$  auseinanderlaufenden Wellenfront entsprechen.

Die Schwierigkeiten in der Beschreibung der „Fortpflanzung“ des Lichtes in  $L_2^0$  für  $ac > 1$  hängen offenbar damit zusammen, daß der  $t$ -Koordinate die „Haupteigenschaft“ der Zeit abgeht, der zufolge von zwei kausal zusammenhängenden Ereignissen der Wirkung stets ein größerer Wert dieser Koordinate als der Ursache entspricht.

<sup>1)</sup> Es ist interessant, sich die Sachlage im  $(2+1)$ -dimensionalen Minkowskischen Diagramm vorzustellen oder im  $(1+1)$ -dimensionalen Fall in rechtwinkligen  $X$ ,  $T$ - oder besser noch in rechtwinkligen  $x$ ,  $t$ -Koordinaten zu zeichnen.

24. Wir wollen noch einige Worte über die allgemeine ( $L_2$ )-Transformation hinzufügen, da von hier aus nur ein Schritt zum allgemeinen  $(3+1)$ -dimensionalen Fall führt. Wir wollen uns die Sachlage jetzt so vorstellen, daß ein beliebiges lineares eigentliches RZ.-Koordinatensystem  $L_2$  in unserem Linienlande gegeben ist, von welchem wir mittels linearer Transformationen vom Typus ( $L_2$ ) zu  $\infty^1$  Galilei-Systemen übergehen können. Von diesen sind zwei besonders einfach mit  $L_2$  verknüpft, und zwar 1. das „mitbewegte Galilei-System“ oder „Eigensystem des Systems  $L_2$ “ — wir wollen es  $G^0$  nennen —, das wir durch Nullsetzung von  $w$  in ( $L_2$ ) erhalten, und 2. das „synchrone Galilei-System“ —  $G'$  —, das wir ebenso durch Nullsetzung von  $a$  erhalten. Die Werte der drei übrigbleibenden Koeffizienten in ( $L_2$ ) sind dann mit den drei  $g_{ik}$ -Koeffizienten in  $L_2$  eindeutig verknüpft. Wir geben nur die Formeln an, die als direkte Verallgemeinerungen der bereits besprochenen zu erkennen sind; nach Ersetzung der  $x$ -Achse durch die  $x_\alpha$ -Achse behalten sie auch im allgemeinen Fall (Ziffer 26) ihre Gültigkeit.

Für das Quadrat des Intervalls erhalten wir

$$s^2 = (\Delta X)^2 - c^2 (\Delta T)^2 = g_{11} (\Delta x)^2 + 2 g_{41} \Delta x \cdot \Delta ct + g_{44} (\Delta ct)^2 \quad (16)$$

mit

$$g_{11} = A^2 - B^2 (c a)^2, \quad g_{41} = -A^2 \frac{w}{c} + B^2 c a, \quad -g_{44} = B^2 - A^2 \frac{w^2}{c^2}.$$

Daraus berechnen wir für  $a = 0$

$$w = \frac{c_+ - c_-}{2} \quad (17)$$

und für  $w = 0$

$$a = \frac{c_- - c_+}{2 c_- c_+} = \frac{v_- - v_+}{2 v_- v_+} = \frac{1}{c} \frac{g_{41}}{-g_{44}}, \quad (18)$$

wo  $v_+$  und  $v_-$  ein Paar „dynamisch äquivalenter“ Geschwindigkeiten nach Ziffer 20 bedeuten.

Indem wir in (16)  $s = 0$  setzen und durch  $(\Delta t)^2$  dividieren, erhalten wir eine quadratische Gleichung für die Lichtgeschwindigkeit in  $L_2$ . In einem eigentlich RZ.-Koordinatensystem haben die beiden Wurzeln dieser Gleichung entgegengesetzte Vorzeichen; wir setzen sie gleich  $c_+$  und  $-c_-$ . Die positiven Größen  $c_+$  und  $c_-$  bezeichnen dann die skalaren Lichtgeschwindigkeiten in beiden Richtungen der  $x$ -Achse. Wir erhalten

$$g_{41} = g_{44} c \frac{c_+ - c_-}{2 c_+ c_-} = g_{44} c \frac{v_+ - v_-}{2 v_+ v_-} = g_{11} \frac{c_- - c_+}{2 c}. \quad (19)$$

## III.

25. Nach diesen elementaren Erörterungen können wir jetzt kurzerhand den allgemeinen  $(3+1)$ -dimensionalen Fall erledigen. Die Gleichungen (L) übermitteln den Übergang vom Galileischen Ausgangssystem  $G$  zu dem linearen System L. Damit für diesen eine Bezugsmolluske existieren könne, müssen die in L ruhenden Punkte Geschwindigkeiten in  $G$  haben, die kleiner als  $c$  sind. Wir erhalten also unmittelbar aus (L) die „Bedingung der Bezugsmolluske“:

$$A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 < A_{44}^2 \quad (20)$$

oder durch Einsetzen in den Ausdruck für  $s^2$

$$g_{44} < 0. \quad (21)$$

Damit aber L ein eigentliches RZ.-Koordinatensystem sei, müssen noch seine Chronoskope entsprechend „gegenseitig eingestellt“ werden (\*) und zwar derart, daß kein Punkt, der sich mit Unterlicht- oder Lichtgeschwindigkeit in  $G$  bewegt, die L-Chronoskope bei konstantem  $t$  passieren könne. Aus  $\Delta t = 0$  muß also

$$\left( \frac{\Delta X}{\Delta T} \right)^2 + \left( \frac{\Delta Y}{\Delta T} \right)^2 + \left( \frac{\Delta Z}{\Delta T} \right)^2 < c^2 \quad (22)$$

folgen, was nichts anderes besagt, als daß die Form  $s^2$  für  $\Delta t = 0$  positiv definit sein muß. Die Bedingungen dafür sind bekanntlich

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad |g_{\alpha\beta}| > 0. \quad (23)$$

Die Ungleichungen (21) und (23) zusammen drücken also die Bedingung dafür aus, daß die L-Koordinaten eigentliche RZ.-Koordinaten sind, gleichzeitig bürgen sie auch dafür, daß  $s^2$  eine nicht-ausgeartete quadratische Differentialform vom Trägheitsindex 3 ist. Bekanntlich ist die allgemeine Bedingung dafür, unabhängig von der Art des zugrunde gelegten Koordinatensystems, daß in der Reihe

$$1, \quad g_{11}, \quad \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad |g_{\alpha\beta}|, \quad |g_{ik}| \quad (24)$$

nur ein Vorzeichenwechsel stattfindet. Es ist leicht einzusehen, daß aus (21) und (23)  $|g_{ik}| < 0$  folgt, aber nicht umgekehrt, denn bei vier raumartigen Achsen z. B. (uneigentlichen RZ.-Koordinaten ohne Bezugsmolluske) sind die ersten vier Größen in (24) positiv, also muß der Vorzeichenwechsel an letzter Stelle erfolgen, doch ist dann  $g_{44} > 1$ .

26. Nehmen wir jetzt also an, daß L ein eigentliches lineares RZ.-Koordinatensystem ist, ohne — wie in Ziffer 24 — darauf zu achten (vgl.

Ziffer 24), wie es entstanden ist. Um die physikalische Bedeutung der  $g_{ik}$ -Koeffizienten in diesem Koordinatensystem kurz zu rekapitulieren, schreiben wir den Ausdruck für  $s^2$  in den folgenden Formen auf, die durch elementare algebraische Umformungen auseinander hervorgehen. Dabei unterscheiden wir zwischen ko- und kontravarianten Tensorkomponenten und machen von der Einsteinschen Summationsregel Gebrauch ( $\alpha, \beta$  von 1 bis 3,  $i, k$  von 1 bis 4):

$$s^2 = g_{ik} x^i x^k = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + 2 g_{4\alpha} x^\alpha (ct) + g_{44} (ct)^2, \quad (25)$$

$$= \gamma_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta + g_{44} c^2 (t - a_\alpha x^\alpha)^2 = \sigma^2 + g_{44} c^2 (t - a_\alpha x^\alpha)^2, \quad (25^0)$$

$$= g_{\alpha\beta} (x^\alpha - w^\alpha t) (x^\beta - w^\beta t) + \left( g_{44} - g_{\alpha\beta} \frac{w^\alpha w^\beta}{c^2} \right) (ct)^2, \quad (25^1)$$

wo

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{44} c^2 a_\alpha a_\beta, \quad (26)$$

$$a_\alpha = \frac{1}{c} \frac{g_{4\alpha}}{g_{44}}, \quad (27)$$

$$w^\alpha = -c g^{\alpha\beta} g_{4\beta}. \quad (28)$$

Die Gleichungen (25<sup>0</sup>) und (25<sup>1</sup>) deuten an, mittels welcher linearen Koordinatentransformationen man von  $L$  zu einem „mitbewegten Galilei-System“  $G^0$  und zu einem „synchronen Galilei-System“  $G'$  (vgl. Ziffer 24) übergehen kann<sup>1)</sup>.

Nun können wir die Gedankenexperimente, welche zur Messung der einzelnen  $g_{ik}$ -Koeffizienten führen, wie folgt zusammenfassen. Wir stellen zuerst in  $L$  ruhend ein Chronometer auf; die an diesem Chronometer abgelesene Zeitdauer (in sec) eines Schläges des Koordinatenchronoskops ( $\Delta t = 1$ ) gibt uns die  $\sqrt{-g_{44}}$  an (vgl. Ziffer 12, 17 und 21). Dann messen wir die Lichtgeschwindigkeiten in den sechs Richtungen der positiven und negativen Achsen und erhalten daraus die Komponenten des „Asymmetrievektors“ mittels der Formel (vgl. Ziffer 20 und 24):

$$a_\alpha = \frac{c_{\alpha-} - c_{\alpha+}}{2 c_{\alpha-} c_{\alpha+}}. \quad (29)$$

Statt dessen können wir auch drei „dynamische Experimente“ ausführen (Ziffer 20 und 24) und die Formel

$$a_\alpha = \frac{v_{\alpha-} - v_{\alpha+}}{2 v_{\alpha-} v_{\alpha+}} \quad (30)$$

gebrauchen.

<sup>1)</sup> Es ist einleuchtend, daß diese beiden Systeme bis auf eine orthogonale Raumtransformation bestimmt sind.

Aus  $g_{44}$  und  $a_\alpha$  erhalten wir die  $g_{4\alpha}$ -Koeffizienten nach der Forme [vgl. (26) und Ziffer 21 und 24]

$$g_{4\alpha} = -g_{44} c a_\alpha. \quad (31)$$

Sodann messen wir mittels ruhender Maßstäbe nach bekannter geometrischer Art die  $\gamma_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten der räumlichen Fundamentalform  $\sigma^2$  und erhalten daraus die  $g_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten nach der Formel [vgl. (26) sowie Ziffer 21 und 24]

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + g_{44} c^2 a_\alpha a_\beta. \quad (32)$$

Wir können auch die  $g_{\alpha\beta}$ -Koeffizienten direkt mit Maßstäben messen, dann müssen wir jedoch anstatt ruhender Maßstäbe solche gebrauchen, welche sich mit der Geschwindigkeit  $w^\alpha$  in bezug auf L bewegen (vgl. Ziffer 17, letzter Absatz).

27. Es sei mir erlaubt, unsere Überlegungen mit einer Anführung aus Felix Kleins wunderbaren Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert<sup>1)</sup> zu schließen. Man kann, wie Klein sagt, „von vornherein das vierdimensionale Denken deduktiv zur Geltung bringen“ ohne „die vorliegenden Experimente zu besprechen und ihre ursprünglich dreidimensionale Erfassung allmählich vierdimensional umzudeuten“, doch gleich darauf, nach dem Hinweis auf die Analogie mit den Kopernikanischen und den geozentrischen Weltbildern fügt er hinzu: „Freilich bleibt der ein halber Astronom, der sich nur mit der Kopernikanischen Auffassung in abstracto begnügt und sich nicht eingehend bemüht, die Einzelheiten der geozentrischen Beobachtungen von dort aus genau durchzudenken.“

---

<sup>1)</sup> Bd. II, S. 75.

## Die Eigenschaften reeller Gase auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung.

### VII. Das Boyle-Gebiet bei Helium.

Von **Witold Jacyna** in Leningrad.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 20. April 1935.)

Der Ort von „Amagats Minima“ (Boyle-Linie) hat den Charakter einer durch die allgemeine Gleichung

$$e^{-\eta} - p \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t - 1 = 0$$

bestimmbaren „Sprenglinie“. Letztere fällt im Amagatschen Diagramm entweder mit der „Basislinie“ bei der Temperaturerhöhung oder mit der  $vp$ -Achse bei der Temperaturerniedrigung zusammen. Die klassisch aufgefaßte „Boyle-Temperatur“ soll bei Helium etwa in den Grenzen von 25 bis 35° K (statt von 18 bis 22° K) angenommen werden. Freilich erscheint in der neuen Theorie der Begriff der Boyle-Temperatur selbst konventionell und kann nur als eine erste Annäherung an die wirklichen Verhältnisse betrachtet werden.

Die Schlußfolgerungen sind tabellarisch bzw. graphisch dargestellt.

1. Es stellt die „Boyle-Linie“ oder die Linie der „Amagatschen Minima“<sup>1)</sup> den geometrischen Ort der Zustandspunkte („Boyle-Punkte“) dar, deren Koordinaten  $p_b$ ,  $\psi$  entweder durch die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial J}{\partial p} \right)_t &= \left( \frac{\partial U}{\partial p} \right)_t \\ \left( \frac{\partial (vp)}{\partial p} \right)_t &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

oder auch

bestimmbar sind<sup>2)</sup>, wobei wir die Volumenarbeit<sup>3)</sup>  $vp$  mit Hilfe der thermodynamischen Zustandsgleichung

$$vp = R\psi + ap(1 - e^\eta)f(t) \quad (2)$$

ausdrücken wollen. Wir erhalten also statt (1) zuerst

$$1 - e^\eta - p_b e^\eta \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t = 0$$

und danach, wegen  $e^\eta \neq 0$ ,

$$e^{-\eta} - p_b \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t - 1 = 0, \quad \eta = b B_t B_p B_k, \quad (3)$$

<sup>1)</sup> D. Berthelot, Trav. et Mém. d. Bur. int. d. Poids et Mes. **13**, 59, 1907; vgl. auch H. Amagat, Rapport au Congrès de Physique de Paris **1**, 558, 1900. —

<sup>2)</sup> Dabei stellt der „kritische Punkt“ mit  $\left( \frac{\partial (vp)}{\partial p} \right)_t = \infty$  einen besonderen Zustand dar. Vgl. dazu die frühere Mitteilung VI. — <sup>3)</sup> Diese Größe wurde von mir früher stets als „Volumenenergie“ bezeichnet.

wobei, wie früher<sup>1)</sup>, die Basis-, Temperatur- und Niederdruckfunktion bzw. mit Hilfe der Gleichungen

$$B'_p = \frac{p^x - p_q^x}{p_k^x}, \quad p_q^x = n \psi e^{-m \psi},$$

$$B_t = \psi + t' + \frac{B}{\psi - \psi_\pi}$$

und

$$B''_p = e^{-\frac{p_\pi}{p}}, \quad p_\pi = x^4 p_q$$

dargestellt sind und die beiden kritischen Funktionen  $B_k$  und  $B'_k$  ebenfalls die früheren Formen

$$B_k = 1 + y B'_p - x' B'_k$$

und

$$B'_k = \left[ \left( \frac{p_k}{p} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\psi_k}{\psi} - 1 \right)^2 \right]^{\frac{p_\pi}{p_q}}$$

haben, wo

$$y = \frac{\psi}{\psi_k} e^{-\frac{\psi}{\psi_k}}$$

bedeutet und die Druckfunktion

$$B_p = B'_p B''_p$$

ist.

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t &= b B_t B''_p \left\{ x B'_p \left( \frac{y p^{x-1}}{p_k^x} + \frac{2 x' x^3 p_k \left( \frac{p_k}{p} - 1 \right)}{p^2 \left[ \left( \frac{p_k}{p} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\psi_k}{\psi} - 1 \right)^2 \right]^{1-x^4}} \right) \right. \\ &\quad \left. + B_k \left( \frac{x p^{x-1}}{p_k^x} + B'_p \frac{p_\pi}{p^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

wobei das Glied  $B'_p \frac{p_\pi}{p^2}$  in bezug auf  $\frac{x p^{x-1}}{p_k^x}$  einen nur unbedeutenden Einfluß auf die Ableitende  $\left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t$  ausübt<sup>2)</sup>. Also erhalten wir mit einer hinreichenden Annäherung statt des vorigen den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_t &= \frac{2 x b B_t B''_p}{p} \left\{ \frac{1-x'}{2} \frac{p^x}{p_k^x} \right. \\ &\quad \left. + B'_p \left( y \frac{p^x}{p_k^x} + x' x^3 \frac{p_k}{p} \frac{\frac{p}{p_k} - 1}{\left( \frac{p_k}{p} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\psi_k}{\psi} - 1 \right)^2} \right) \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Vgl. die früheren Mitteilungen V und VI. — <sup>2)</sup> Offenbar unter der Bedingung, daß  $p_\pi/p^2$  hinreichend klein ist.

weil

$$x = \frac{1}{4} \quad \text{und folglich} \quad 1 - \frac{p_\pi}{p_q} = 1 - x^4 \approx 1$$

ist. Infolgedessen erhält die Gleichung (1) der Boyle-Linie die folgende Gestalt

$$e^{-\eta} - 2x b B_t B_p'' \left\{ \frac{1-x'}{2} \cdot \frac{p_b^x}{p_k^x} + B_p' \left( y \frac{p_b^x}{p_k^x} + x' x^3 \cdot \frac{p_k}{p_b} \cdot \frac{\frac{p_k}{p_b} - 1}{\left( \frac{p_k}{p_b} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\psi_k}{\psi} - 1 \right)^2} \right) \right\} - 1 = 0, \quad (5)$$

welche nur in der Nähe des kritischen Gebietes in einer so komplizierten Form beibehalten ist und im allgemeinen noch weitere bedeutende Verein-

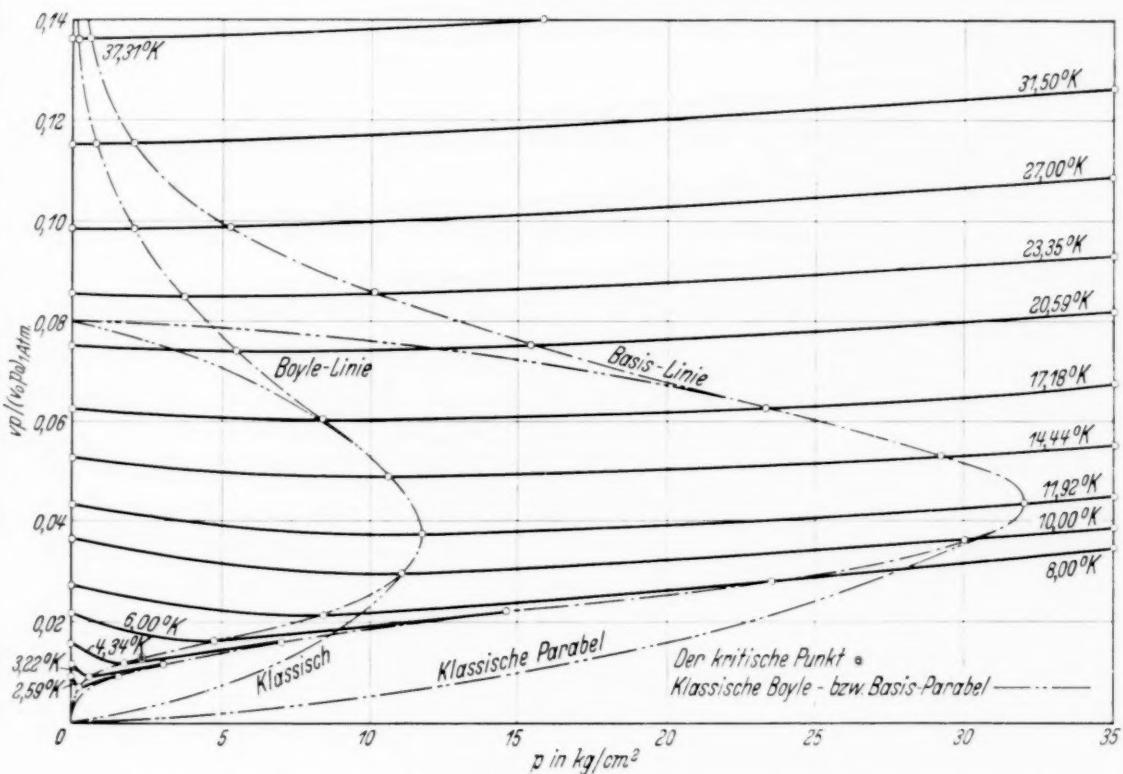


Fig. 1. Boyle-Gebiet im Amagatschen ( $p, v_p$ )-Diagramm bei Helium auf Grund der thermodynamischen Zustandsgleichung (5).

fachungen ohne Einfluß auf die Strenge der Rechnungsresultate gestattet, falls wir berücksichtigen, daß für Helium

$$b = -0,0230, \quad t' = -32^\circ \text{C}, \quad B = 1500 \quad \psi_\pi = 0,17^\circ \text{K},$$

$$\text{und} \quad n = 5,42, \quad m = 0,0839, \quad 1/x = 4, \quad 1/x' = 3,6$$

$$\text{ist.} \quad f(t) = 10 \psi_0 - t$$

2. Falls entweder  $\psi \simeq \psi_\pi$  oder  $\psi \simeq \infty$  ist, wird

$$B_t \simeq \infty, \quad e^{-\eta} \simeq 0, \quad (p_b \leqq p_q!)$$

und hiermit ergibt sich aus (5)<sup>1)</sup>

$$\frac{1-x'}{2} \cdot \frac{p_b^x}{p_k^x} + B'_p \left( y \frac{p_b^x}{p_k^x} + x' x^3 \frac{p_k}{p_b} \frac{\frac{p_k}{p_b} - 1}{\left(\frac{p_k}{p_b} - 1\right)^2 + \left(\frac{\psi_k}{\psi} - 1\right)^2} \right) \simeq 0. \quad (6)$$

Es ist aber bei  $\psi \simeq \psi_\pi$

$$\frac{1-x'}{2} \cdot \frac{p_b^x}{p_k^x} + y B'_p \frac{p_b^x}{p_k^x} \simeq 0 \quad (7)$$

und folglich

$$p_b \simeq 0, \quad (8)$$

weil  $\frac{1-x'}{2} + y B'_p \neq 0$ . Demgegenüber ist bei  $\psi \simeq \infty$  auch  $y \simeq 0$ ; somit

$$\frac{1-x'}{2} \cdot \frac{p_b^x}{p_k^x} + x' x^3 B'_p \frac{p_k}{p_b} \cdot \frac{\frac{p_k}{p_b} - 1}{\left(\frac{p_k}{p_b} - 1\right)^2 + 1} \simeq 0 \quad (9)$$

und daraus folgt notwendigerweise

$$B'_p \simeq 0, \quad \text{d. h. } p_b \rightarrow p_\pi. \quad (10)$$

Also fällt die Boyle-Linie im Amagatschen Diagramm entweder mit der Basislinie bei Temperaturerhöhung oder mit der  $vp$ -Achse bei der Temperaturerniedrigung zusammen. Dies ist auch direkt aus der Tabelle 1 ersichtlich.

3. Es ist außerhalb des kritischen Gebietes, d. h. für  $p \neq p_k$  und  $\psi \neq \psi_k$  das Glied

$$x' x^3 \frac{p_k}{p_b} \cdot \frac{\frac{p_k}{p_b} - 1}{\left(\frac{p_k}{p_b} - 1\right)^2 + \left(\frac{\psi_k}{\psi} - 1\right)^2}$$

relativ sehr klein, und man erhält deshalb statt (5) die folgende Gleichung der Boyle-Linie

$$e^{-\eta} - 2 x b B_t B'_p \frac{p_b^x}{p_k^x} \left( \frac{1-x'}{2} + y B'_p \right) - 1 = 0, \quad (11)$$

---

<sup>1)</sup> Weil für die Boyle-Linie stets  $p_\pi/p_b^2$  hinreichend klein ist.

Tabelle 1. Das Boyle-Gebiet bei Helium.  
(ber.) gemäß der thermodynamischen Zustandsgleichung, (exp) nach H. Kamerlingh Onnes und I. D. A. Boks.

$\varphi^0$ K	$(v \cdot p)_p = 0$ $(v_0 p_0)_{0^\circ\text{C}, 1\text{Atm}}$	$10^{-4} p_q(\text{ber}) \text{ kg/m}^2$	$10^{-4} p_q(\text{exp}) \text{ kg/m}^2$	$10^{-4} p_b(\text{ber}) \text{ kg/m}^2$	$10^{-4} p_b(\text{exp}) \text{ kg/m}^2$	$(v \cdot p)_{\min}$ $(v_0 p_0)_{0^\circ\text{C}, 1\text{Atm}}$	$(v \cdot p)_{\min}$ $(v_0 p_0)_{0^\circ\text{C}, 1\text{Atm}}$
2,59	0,00947	1,62	—	0,24	—	0,0073 <sub>1</sub>	—
3,22	0,0117 <sub>6</sub>	3,10	—	0,61	—	0,0090 <sub>6</sub>	—
3,85	0,0140 <sub>9</sub>	5,15	—	1,24	—	0,0102 <sub>9</sub>	—
4,34	0,0158 <sub>8</sub>	7,07	—	1,83	—	0,0114 <sub>0</sub>	—
6,00	0,0219 <sub>5</sub>	14,7 <sub>5</sub>	—	4,80	—	0,0158 <sub>5</sub>	—
8,00	0,0275 <sub>4</sub>	23,7	—	8,50	—	0,0206 <sub>1</sub>	—
10,00	0,0365 <sub>8</sub>	30,2	—	11,10	—	0,0295 <sub>9</sub>	—
11,92	0,0436 <sub>0</sub>	32,0	—	11,75	—	0,0375 <sub>1</sub>	—
14,44	0,0528 <sub>2</sub>	29,3	von 28—30	10,60	von 10—11	0,0186 <sub>1</sub>	0,0486
17,18	0,0628 <sub>5</sub>	23,5	" 23—24	8,45	" 8—9	0,0601 <sub>4</sub>	0,0601 <sub>5</sub>
20,59	0,0753 <sub>3</sub>	15,4	" 15—16	5,66	" 5,5—6	0,0740 <sub>2</sub>	0,0740
23,35	0,0854 <sub>6</sub>	10,2	" 10—10, <sub>5</sub>	3,80	" 3,5—4	0,0847 <sub>5</sub>	0,0848
37,31	0,1365 <sub>1</sub>	0,608	—	0,24	—	0,1364 <sub>9</sub>	—
89,90	0,3289	0,0 <sub>6</sub> 422	—	0,0 <sub>6</sub> 38	—	0,3289	—
131,21	0,4800	0,0 <sub>11</sub> 2 <sub>1</sub>	—	0,0 <sub>11</sub> 2 <sup>2</sup>	—	0,4800	—

welche *außerhalb der Parabel*, die das *klassische Boyle-Gebiet umfaßt* (vgl. Fig. 1), am einfachsten ausfällt, weil dabei

$$y \cong 0$$

und folglich

$$e^{-\eta} - x(1-x') b B_t B_p'' \frac{p_b^x}{p_k^x} - 1 = 0 \quad (12)$$

ist<sup>1)</sup>.

Die auf Grund der Gleichungen (5), (11) und (12) berechneten  $(p_b)_{\text{ber}}$ -Werte sind in der Tabelle 1 mit einigen experimentell von Kamerlingh Onnes, Boks u. a. bei den Temperaturen 14,44, 17,18, 20,59 und 23,35° K ( $\psi_0 = 273,22^0$  K) gefundenen  $(p_b)_{\text{exp}}$ -Daten zusammengestellt.

4. Schließlich haben wir im  $(p, vp)$ -Diagramm (Fig. 1) auch die klassische Boyle- bzw. Basis-Parabel gemäß der van der Waals-Berthelotschen Theorie mit der klassischen „Boyle-Temperatur“ etwa 22° K und der relativen Volumenarbeit  $vp/(r_0 p_0)_{00,1\text{Atm}} = 0,08$  bezeichnet. Es ist aber auf Grund der Fig. 1 ersichtlich, daß sogar bei einer strengeren Ausführung der klassischen Boyle-Linie für die „Boyle-Temperatur“ der größere Wert etwa  $\psi_B = 25^0$  K wird, während vom Standpunkt der neueren Untersuchungen aus, d. h. mit Rücksicht auf die „Spreng-“ bzw. „aperiodische“ Form der Basis- bzw. Boyle-Linie diese Temperatur noch etwas höher, nämlich zwischen 25 und 35° K angenommen werden soll. Letzteres ist auch selbstverständlich, sobald man berücksichtigt, daß der Übergang von der Leidener Skale mit  $\psi_0 = 273,10^0$  K zu der mit  $\psi_0 = 273,22^0$  K die Änderung der extrapolierten  $(vp)_{p=0}$ -Werte, keineswegs aber der bei  $p > 0$  experimentell bestimmten  $(vp)$ -Werte der Volumenarbeit verursacht.

*Leningrad, April 1935.*

---

<sup>1)</sup> Es ist oberhalb des klassischen Boyle-Gebietes auch  $B_p'' \cong 1$ .

## Zur Sichtbarmachung stehender Schall- und Ultraschallwellen in Gasen.

Von **O. Brandt** und **H. Freund** in Köln.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 15. Mai 1935.)

Es wird eine neue Demonstrationsanordnung zur Sichtbarmachung der stehenden Wellen in Kundtschen Röhren mitgeteilt, die sich auch besonders für Frequenzen des Ultraschallgebietes eignet. Die Methode soll auch für Meßzwecke ausgebaut werden.

Die Verfasser<sup>1)</sup> wiesen kürzlich auf die Brauchbarkeit der auf Dvorak<sup>2)</sup> zurückgehenden Methode der Sichtbarmachung der stehenden akustischen Wellen in Kundtschen Röhren mittels einer dünnen auf den Rohrboden eingebrachten Flüssigkeitsschicht hin, die sich besonders gut zu Demonstrationszwecken eignet, wenn eine konstante Schallquelle hoher Frequenz und Energie zur Verfügung steht (z. B. Magnetostriktionsschallgeber). Es soll im folgenden noch kurz auf eine wesentliche Verbesserung der Methode hingewiesen werden, die mit einfachen Mitteln gelingt. Es ist klar, daß die an den Schwingungsbäuchen konvex gekrümmte Flüssigkeitsoberfläche nach Art einer Zylinderlinse wirkt. Durch das Zusammenwirken der verschiedenen in regelmäßigen Abständen wiederkehrenden Erhebungen der Flüssigkeitsoberfläche entsteht in einer Ebene ein System paralleler heller Streifen, wenn das Rohr von oben beleuchtet wird.

Als Lichtquelle diente zu Demonstrationszwecken eine Glühlampe mit geradem Faden, die in einer Höhe von 1 bis 2 m über dem Schallrohr angebracht war. Der senkrecht zum Schallrohr stehende Faden wurde dann als sehr feiner helleuchtender Strich auf einem in der Bildebene angebrachten Schirme abgebildet. Es ergibt sich so ein auch für kurze Wellen weithin sichtbares Streifenbild (Fig. 1), so daß die üblichen Demonstrationen sehr wirksam werden (Abstimmen durch Verschieben des Reflektors, Wellenlänge in Luft, Leuchtgas, Wasserstoff usw.).

Die Methode läßt sich auch zur Messung verwenden. Wegen der sehr großen Schärfe der Streifen (Fig. 1) dürfte es gelingen, die Meßgenauigkeit auch im Ultraschallgebiet weiter zu steigern. Die optische Anordnung



Fig. 1. Streifenbild  
einer stehenden Welle in Luft.

<sup>1)</sup> O. Brandt u. H. Freund, ZS. f. Phys. **92**, 385, 1934. — <sup>2)</sup> V. Dvorak, Pogg. Ann. **153**, 102, 1874.

und Meßmethodik ist dabei analog der von Hiedemann<sup>1)</sup> und seinen Mitarbeitern benutzten Methode zur Sichtbarmachung von Kompressionsstellen in flüssigen und festen Körpern, die von Ultraschallwellen durchsetzt werden.

Die von uns zuerst angegebene Methode zur Sichtbarmachung der akustischen Wellenlängen durch Niederschlagsbilder von Schwebestoffen<sup>2)</sup> wurde inzwischen von Pearson<sup>3)</sup> unabhängig von uns zur Messung benutzt. Er erhielt bei seinen Messungen einen völlig abnormalen Verlauf der Schalldispersionskurve, der den bisherigen Ergebnissen widerspricht, die mit dem Ultraschallinterferometer gewonnen wurden, und gibt dabei seiner Methode ein größeres Gewicht als der Interferometermethode, da sie unmittelbar sei. Eine der Fehlerquellen der Personschen Arbeit ist die Undefiniertheit der Reinheit des Gases infolge des Vorhandenseins der Schwebestoffe [Tabakrauch]<sup>4)</sup>.

Die neue Methode ist ebenso unmittelbar wie die von Pearson angewandte, man kann aber bei ihr durch Anwendung geeigneter Mittel (Verwendung von Flüssigkeiten mit verschwindendem Dampfdruck) die genannte Fehlerquelle vermeiden. Bei weiterer Verbesserung der Meßgenauigkeit scheint es daher möglich, mittels dieser Methode einen einwandfreien Vergleich mit den Interferometermessungen durchzuführen.

Köln, Physikalisches Institut der Universität, im Mai 1935.

---

<sup>1)</sup> Ch. Bachem, E. Hiedemann u. H. R. Asbach, Nature **133**, 176, 1934; ZS. f. Phys. **87**, 734, 1934; **88**, 395, 1934; Ch. Bachem u. E. Hiedemann, ebenda **89**, 502, 1934; **91**, 418, 1934; **94**, 68, 1935; E. Hiedemann u. N. Seifen, ebenda **91**, 413, 1934; E. Hiedemann, H. R. Asbach u. K. H. Hoesch, ebenda **90**, 322, 1934; Naturwissensch. **22**, 465, 1934. — <sup>2)</sup> O. Brandt u. H. Freund, I. c.; ZS. f. Phys. **94**, 348, 1935. — <sup>3)</sup> E. B. Pearson, Proc. Phys. Soc. London **47**, 149, 1935. — <sup>4)</sup> Nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn Privatdozent Dr. Hiedemann ist möglicherweise der dadurch bewirkte Fehler der Grund für den merkwürdigen Verlauf der Personschen Dispersionskurve, da bei einer geringen Vergrößerung der von Pearson angegebenen Fehlgrenze die gefundene Dispersion innerhalb der Fehlgrenzen fallen würde.